HAL
open science

Contribution à l'étude de la propagation des ultrasons en milieu cavitant

Olivier Louisnard

To cite this version:

Olivier Louisnard. Contribution à l'étude de la propagation des ultrasons en milieu cavitant. Génie des procédés. Ecole des mines de Paris, 1998. Français. NNT : 1998ENMP0817 . tel-01857809

HAL Id: tel-01857809

https://imt-mines-albi.hal.science/tel-01857809

Submitted on 17 Aug 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE DES MINES DE PARIS
Collège doctoral

N° attribué par la bibliothèque

Thèse

pour obtenir le grade de

Docteur de L'Ecole des Mines de Paris

Spécialité «Génie des procédés»

présentée et soutenue publiquement
par

Olivier LOUISNARD
Ingénieur ENSAE

le 6 Juillet 1998

Contribution à l'Étude de la Propagation des Ultrasons en Milieu Cavitant

---

Jury

MM.	J. Frohly	Président
	H. Delmas	Rapporteur
	J. Magnaudet	Rapporteur
	J. Schwartzentruber	Directeur de thèse
	F. Charru	Directeur de thèse
	B. Dubus	Examinateur

Avant-propos

Ce travail de recherche a été réalisé au sein du centre Poudres et Procédés de l'Ecole des Mines d'Albi-Carmaux.

Je tiens tout d'abord à remercier Jacques SCHWARTZENTRUBER pour avoir soutenu l'initiative de cette étude, pour l'avoir dirigée avec enthousiasme et confiance, et pour ses encouragements dans les moments difficiles.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et toute mon amitié à François CHARRU pour avoir assumé la codirection de ce travail. Sa disponibilité, sa sympathie et ses grandes compétences scientifiques et pédagogiques me furent précieuses. Les passionnantes discussions scientifiques que nous avons partagé, bien au-delà de la thématique de cette étude, furent pour moi une source d'enrichissement constant.

Je souhaite remercier vivement Henri DELMAS et Jacques MAGNAUDET, qui ont accepté d'être rapporteurs de mon travail, pour leurs remarques et questions pertinentes sur ce mémoire, et les discussions enrichissantes qui s'ensuivirent.

J'adresse mes sincères remerciements à Jacques FROHLY, pour avoir examiné ce travail et accepté la présidence du jury, ainsi qu'à Bertrand DUBUS, pour avoir montré l'intérêt qu'il porte à cette étude en participant également au jury.

Je voudrais exprimer ici toute ma sympathie à l'ensemble des membres du groupe Interfaces de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse pour leur excellent accueil, et pour m'avoir considéré comme l'un des leurs tout au long de ce travail. Je remercie tout particulièrement Jean FABRE de m'avoir spontanément accordé le soutien de l'IMFT pour mener à bien cette étude, et Frédéric RISSO qui m'a permis de présenter mon travail à l'ensemble de l'équipe.

Je tiens à remercier amicalement Paul GABORIT pour son aide sur tous les aspects informatiques, et Christophe PERE pour son soutien moral et matériel dans la phase finale d'élaboration de ce mémoire. Je voudrais que tous mes collègues doctorants et enseignants-chercheurs de l'Ecole de Mines trouvent ici l'expression de ma reconnaissance pour leur soutien constant et leurs multiples témoignages de sympathie.

Je remercie également Marie-Claude BASTOK pour sa patience et m'avoir facilité toutes les démarches administratives relatives à cette étude.

Enfin, je souhaite exprimer ma profonde reconnaissance à Marie-Stéphane et à mes enfants pour la patience dont ils firent preuve à mon égard durant la réalisation de cette étude, ainsi qu'à mes parents et à Paule pour leur soutien moral et leurs encouragements.

Sommaire

Introduction générale **1**

1 La bulle de cavitation **5**

1.1 Introduction 5

1.2 Approche générale 6

1.2.1 Rayon d'équilibre 6

1.2.2 Seuil de Blake 7

1.2.3 Cavitation acoustique 9

1.3 Equations du problème 10

1.3.1 Introduction 10

1.3.2 Liquide incompressible 11

1.3.3 Effet de la compressibilité du liquide 19

1.4 Dynamique d'oscillation 22

1.4.1 Oscillations linéaires 23

1.4.2 Oscillations non-linéaires 24

1.5 Effets thermiques 34

1.5.1 Introduction 34

1.5.2 Modélisation 39

1.5.3 Oscillations linéaires 44

1.6 Simulation numérique 51

1.6.1 Changement de variables 51
1.6.2 Résolution dans le cadre polytropique 52
1.6.3 Résolution exacte des effets thermiques 52
1.7 Seuil de cavitation instable 54
1.7.1 Phase de croissance 54
1.7.2 Etude de l'implosion 55
1.7.3 Rayon maximum 57
1.7.4 Seuil d'Apfel 57

2 Modèles de liquides à bulles 59

2.1 Introduction 59
2.2 Modélisation des milieux diphasiques. 60
2.2.1 Généralités 60
2.2.2 Notion de fermeture 61
2.2.3 Moyennage volumique 61
2.2.4 Moyennage d'ensemble 62
2.3 Propagation d'ondes dans les liquides à bulles 65
2.3.1 Méthode de Foldy 65
2.3.2 Modèle de Iordansky-Kogarko-van Wijngaarden 68
2.3.3 Modèle de Caflish 72
2.3.4 Relation de dispersion linéaire 78
2.4 Ondes stationnaires linéaires dans les liquides à bulles 81
2.4.1 Solution générale 81
2.4.2 Onde stationnaire parfaite 85
2.4.3 Influence du réflecteur 85
2.4.4 Atténuation de l'onde 86
2.4.5 Aspects énergétiques 89

2.4.6 Mesures d'atténuation et de la vitesse de phase 90
2.4.7 Synthèse 92
2.5 Ondes non-linéaires 93
2.5.1 Approche physique 94
2.5.2 Réduction du modèle de Caflish à une équation de KdVB 98
2.5.3 Différents types d'ondes non-linéaires. 105
2.6 Autres modèles 108
2.6.1 Prise en compte de la vitesse relative 108
2.6.2 Interaction entre les bulles Sangani (1991) 110
2.6.3 Simulation numérique directe Sangani and Sureshkumar (1993) 111
2.6.4 Modèle de Zhang and Prosperetti (1994) 112
2.7 Conclusion 114

3 Méthode numérique 117

3.1 Introduction 117
3.2 Equations de Caflish 118
3.2.1 Réécriture en potentiel 118
3.2.2 Adimensionalisation 119
3.3 Méthode des résidus pondérés 120
3.3.1 Conditions aux limites 120
3.3.2 Formulation intégrale 121
3.4 Approximation aux éléments finis 122
3.4.1 Interpolation polynômiale par morceaux 122
3.4.2 Choix des fonctions poids 125
3.5 Résolution 126
3.6 Conclusion 127

4 Ondes non-linéaires obtenues par simulation numérique 129

4.1 Introduction 129

4.1.1 Approche envisagée 129

4.1.2 Choix des paramètres 130

4.2 Ondes progressives 130

4.2.1 Raidissement non-linéaire. 131

4.2.2 Validité de la réduction à l'équation de KdVB. 136

4.2.3 Solitons 141

4.2.4 Synthèse 144

4.3 Ondes stationnaires 146

4.3.1 Choix des paramètres 146

4.3.2 Présentation des résultats 147

4.3.3 Basses fréquences ($f \ll f_0$) 147

4.3.4 Fréquences au voisinage de la fréquence $f_0/2$ 163

4.4 Conclusion 176

5 Modélisation de l'évolution du champ de bulles 179

5.1 Introduction 179

5.1.1 Approche proposée 179

5.1.2 Rappel et notations 182

5.1.3 Caractérisation de la population de bulles 183

5.2 Diffusion rectifiée 183

5.2.1 Approche intuitive 183

5.2.2 Bibliographie 185

5.2.3 Grandes lignes de la mise en équation 186

5.2.4 Résolution 188

5.2.5 Hypothèse linéaire 189

5.2.6 Taux de croissance d'une bulle 190
5.2.7 Synthèse 192
5.3 Forces de Bjerknes 193
5.3.1 Introduction 193
5.3.2 Origine physique 194
5.3.3 Force acoustique sur une bulle 195
5.3.4 Lévitation d'une bulle 198
5.3.5 Vitesse de translation moyenne d'une bulle 200
5.3.6 Synthèse 210
5.4 Coalescence 211
5.4.1 Forces de Bjerknes secondaires. 212
5.4.2 Mouvement d'approche de deux bulles 217
5.4.3 Modélisation de la coalescence 218
5.4.4 Evolution de la distribution de taille par coalescence. . 222
5.5 Fragmentation 225
5.5.1 Rappels théoriques 225
5.5.2 Fragmentation d'une bulle implosant 227
5.5.3 Fragmentation d'une bulle stable 229
5.5.4 Synthèse 239
5.6 Evolution globale de la population de bulle 239
5.6.1 Equation de conservation 239
5.6.2 Couplage avec l'équation de propagation 241
5.6.3 Résolution numérique : un objectif illusoire ? 242
5.7 Conclusion 244

6 Recherche d'une population de bulles stationnaire. 245

6.1 Introduction 245

6.2 Comparaison des différents seuils. 246

6.3 Effet d'écran 249

6.3.1 Hypothèses 249

6.3.2 Zones de cavitation 249

6.3.3 Migration d'une bulle entre les zones 254

6.4 Plusieurs paradoxes- Discussion 258

6.4.1 Une migration à sens unique ? 258

6.4.2 Fragmentation ou dissolution : une autre alternative ? . 260

6.4.3 Synthèse 264

6.5 Transition vers l'effet d'écran 264

6.5.1 Interprétation qualitative 264

6.5.2 Implication sur les champs de bulle à haute fréquence . 268

6.6 Suggestions pour des expérimentations 269

6.7 Conclusion 270

Conclusion générale 273

Nomenclature 279

A Rappel des équations de la mécanique des fluides 299

B Méthode spectrale pour la résolution des effets thermiques dans la bulle 303

C Forces hydrodynamiques exercées sur une particule. 309

C.1 Décomposition générale 309

C.2 Force de masse ajoutée 310

C.3 Force de traînée visqueuse 311

D Harmoniques sphériques. 313

Table des figures 315

Introduction générale

L'utilisation des ultrasons de puissance pour augmenter le rendement de nombreux phénomènes physico-chimiques a connu un essor sans cesse croissant depuis les premières expérimentations du début de ce siècle. La liste des applications est très longue (une excellente revue peut être consultée dans Suslick (1988)), mais un premier tri peut être effectué en considérant les phénomènes intervenant à l'intérieur d'une phase liquide.

Parmi ces derniers, on peut séparer les phénomènes activés par la seule présence d'une onde acoustique, comme par exemple l'atomisation, de ceux engendrés par le phénomène de cavitation acoustique. On peut définir ce phénomène comme l'oscillation de bulles de gaz microscopiques au sein du liquide, ces oscillations s'accompagnant d'effets secondaires, comme la croissance des bulles ou leur migration dans le liquide. Mais le plus important de ces effets, rendu responsable de la majorité des effets de la cavitation, est l'implosion violente de certaines bulles pour des puissances acoustiques suffisantes.

Sur le plan purement mécanique, ces bulles peuvent fournir localement une densité d'énergie suffisante pour casser une goutte de liquide à leur voisinage, activant ainsi le phénomène d'émulsification ; briser des particules solides pour fournir des dispersions solides uniformes, où augmenter le nombre de sites de nucléation secondaire dans des procédés de cristallisation ou de précipitation. D'autre part, au voisinage d'une paroi solide fixe, l'implosion des bulles s'effectue de manière asymétrique, engendrant la formation d'un microjet de liquide ; ce phénomène est utilisé classiquement dans des applications de nettoyage ou d'ébarbage.

Mais l'implosion d'une bulle conduit de plus à une compression considérable de son contenu, la théorie prédisant des pressions de plusieurs centaines d'atmosphères, et des températures de plusieurs milliers de Kelvin. Le contenu de la bulle est donc soumis à des conditions extrêmes pendant un temps très court, et l'on conçoit aisément que des transformations chimiques inhabi-

tuelles puissent y intervenir. Cette thématique porte le nom de sonochimie, et a connu un essor particulier ces dernières années (voir par exemple Mason (1990a); Suslick (1988) et la série Mason (1990b)). Les phénomènes précis intervenant dans la bulle à la fin de l'implosion sont encore mal compris, et peuvent se manifester de manière très spectaculaire, sous la forme d'un flash lumineux très court. L'étude de ce phénomène intrigant, appelé sonoluminescence, a connu un développement très important ces dernières années (voir la revue de Walton and Reynolds (1984) et plus récemment Barber et al. (1997)).

Lorsque la cavitation acoustique apparaît, quels que soient les effets recherchés, un échange d'énergie entre l'onde acoustique et les bulles de cavitation intervient. La partie irréversible de cet échange est responsable des effets observés, et une fraction de l'énergie acoustique est convertie par exemple en énergie de surface dans le cas de l'émulsification, en énergie interne des produits lors d'une réaction chimique, ou encore en chaleur. Dans tous les cas, une énergie moyenne non nulle est prélevée à l'onde acoustique, et il en résulte un amortissement spatial de cette dernière.

Cet amortissement pose le problème de la localisation des effets dans le milieu, et tout expérimentateur sait que ces derniers sont généralement localisés au niveau de la source acoustique. Dans l'optique d'une transposition des procédés ultrasonores à l'échelle industrielle, il serait souhaitable de pouvoir prédire quantitativement les effets de la cavitation en chaque point du milieu, en fonction des paramètres expérimentaux et de la géométrie du système. L'obtention d'un outil de simulation fiable serait l'aboutissement ultime d'une telle démarche.

L'ambition de notre étude est d'examiner les interactions entre les bulles de cavitation et l'onde acoustique qui leur donne naissance, de mettre en équations cette interaction, et d'en déduire l'amplitude de l'onde acoustique en chaque point pour des configurations simples. L'énoncé de cet objectif met en évidence deux échelles spatiales : l'échelle de la bulle, microscopique, et l'échelle de l'expérimentateur, macroscopique, correspondant à la taille du récipient contenant le milieu traité.

Dans le chapitre 1, nous nous intéresserons à l'échelle de la bulle, et rappellerons un ensemble de résultats sur les oscillations d'une bulle de gaz soumise à un champ acoustique.

Pour revenir ensuite à une échelle macroscopique, nous passerons en revue dans le chapitre 2 un ensemble de méthodes de moyennage conduisant à différents modèles de liquides à bulles. Parmi ceux-ci, nous retiendrons un

modèle particulier, et justifierons ce choix.

Disposant d'un système d'équations général décrivant les liquides à bulles, nous pourrons ensuite envisager sa résolution dans le cadre d'un problème de propagation acoustique. Pour limiter la complexité du problème, nous nous intéresserons à un domaine monodimensionnel fermé à une extrémité par une source acoustique et à l'autre par un réflecteur, cette configuration donnant naissance à un régime d'ondes stationnaires.

Même avec cette simplification, la résolution générale du problème de cavitation acoustique s'avère délicate. La complexité se situe à deux niveaux :
- Les équations sont non-linéaires.
- La population de bulles dans une expérience de cavitation n'est pas une donnée du problème, mais surgit spontanément sous l'influence de l'onde acoustique.

La prise en compte simultanée de ces deux aspects est irréalisable pratiquement, et nous choisirons de les considérer séparément.

Nous nous affranchirons dans un premier temps de la seconde contrainte, et nous considérerons que la population de bulles est une donnée du problème. La non-linéarité du problème sera partiellement abordée analytiquement, mais seulement pour des ondes progressives, et dans un domaine paramétrique assez limité. C'est pourquoi nous développerons dans le chapitre 3 une méthode numérique de résolution du problème non-linéaire.

Dans le chapitre 4, cette méthode sera tout d'abord utilisée pour conforter les résultats analytiques obtenus, puis pour étudier des régimes d'ondes stationnaires non-linéaires dans une géométrie monodimensionnelle fermée, pour différents domaines de fréquences acoustiques.

Dans un deuxième temps, nous laisserons de coté les aspects non-linéaires, et nous nous intéresserons à la structure de la population de bulles engendrée par l'onde acoustique. Dans le chapitre 5, les différents phénomènes physiques susceptibles d'altérer la distribution de tailles et la répartition spatiale des bulles seront modélisés, et nous obtiendrons ultimement un modèle décrivant les évolutions couplées de l'onde acoustique et de la population de bulles.

Afin de vérifier la validité de notre approche, nous examinerons dans le chapitre 6 si le modèle proposé peut rendre compte qualitativement de l'effet d'écran, phénomène observé communément à basse fréquence, et proposerons des améliorations éventuelles.

Chapitre 1

La bulle de cavitation

1.1 Introduction

Nous nous intéressons dans cette section à la plus petite entité intervenant dans le problème de cavitation acoustique : la bulle. Nous supposerons celle-ci remplie essentiellement de gaz incondensable, ce qui est approximativement le cas pour des expériences de cavitation dans des liquides suffisamment éloignés du point d'ébullition.

Il existe une littérature abondante sur le mouvement radial d'une bulle sphérique seule en milieu infini soumise à des variations de pression infiniment loin d'elle. Cette configuration est bien sûr une idéalisation, mais reflète approximativement le comportement d'une bulle soumise à une onde acoustique, suffisamment éloignée de tout autre corps, de dimension très inférieure à la longueur d'onde, et suffisamment petite pour que sa vitesse ascensionnelle soit nulle.

Dans la section 1.2, nous décrirons simplement ce qu'est la cavitation acoustique par des considérations de stabilité radiale d'une bulle de gaz.

Le mouvement d'oscillation radial d'une bulle peut être décrit par une équation différentielle, et nous examinerons dans la section 1.3 les différentes formes de cette équation disponibles dans la littérature. Pour mieux comprendre les phénomènes physiques mis en jeu, nous proposerons également une interprétation énergétique de ces équations.

La bulle en oscillation constitue un système dynamique non-linéaire très riche, présentant un ensemble de propriétés typiques, comme l'existence de bifurca-

tions et de transitions vers le chaos. Nous détaillerons l'ensemble de ces propriétés dans la section 1.4, et fournirons également les solutions analytiques obtenues dans le cadre d'oscillations de faible amplitude. Nous effectuerons également un certain nombre de simulations numériques destinés à illustrer la complexité de ce système.

Nous revenons dans la section 1.5 sur un aspect précis de la modélisation de la bulle : le comportement thermique du gaz lors des oscillations. Ce point délicat a fait l'objet d'un grand nombre de publications, et nous y exposerons un modèle récent rendant compte précisément de la dissipation thermique intervenant au cours des oscillations. Ici encore, nous insisterons sur les aspects énergétiques mis en jeu au cours du mouvement.

La section 1.6 détaille la méthode utilisée pour résoudre l'équation différentielle régissant les oscillations de la bulle. Nous rappellerons notamment les fondements d'une méthode spectrale disponible dans la littérature, pour prendre en compte de manière précise les effets thermiques dans la bulle.

Enfin, dans la section 1.7, nous examinerons les divers critères existants permettant de prédire l'amplitude de l'oscillation de pression à partir de laquelle la bulle risque d'imploser.

Notons dès maintenant que le modèle que nous utiliserons pour décrire la propagation d'une onde dans un liquide à bulles inclut une équation décrivant le mouvement d'une bulle comme si elle était seule en milieu infini. Tout le développement ci-dessous, y compris l'approche énergétique, sera donc réutilisable telle quelle dans les chapitres suivants.

1.2 Approche générale

1.2.1 Rayon d'équilibre

Considérons une cavité sphérique dans un milieu liquide infini, remplie d'une certaine quantité de gaz incondensable. On suppose que cette cavité est suffisamment petite pour que sa vitesse ascensionnelle soit négligeable, et nous étudions son équilibre mécanique par rapport à un mouvement radial, en négligeant tout transfert thermique ou de matière.

Soit n_g le nombre de moles de gaz dans la bulle, et R_0 le rayon de cette bulle.

Cet équilibre, s'il existe, résulte de la compensation entre la force de pression exercée par le liquide + la force de tension superficielle qui tendent à contracter la bulle et de la force de pression exercée par le gaz, qui tendent à la dilater. Le rayon d'équilibre R_0 est donné par l'égalité

$$\frac{n_g \mathcal{R} T_0}{4/3\pi R_0^3} - \frac{2\sigma}{R_0} = p_0 \tag{1.1}$$

1.2.2 Seuil de Blake

Envisageons maintenant des détentes du liquide sous la forme $p_0 - p_a$ suffisamment lentes pour que le gaz dans la bulle se comporte de façon isotherme. Le nouveau rayon d'équilibre de la bulle est donné par

$$\underbrace{\left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \frac{2\sigma}{R}}_{p_R} = p_0 - p_a \tag{1.2}$$

Le terme de gauche, qui représente la pression au voisinage de la paroi de la bulle, admet un minimum pour un rayon

$$R_B = R_0 \left[3\left(1 + \frac{p_0 R_0}{2\sigma}\right)\right]^{1/2} \tag{1.3}$$

L'équilibre est donc impossible lorsque la dépression est suffisamment importante pour rendre le terme de droite inférieur à ce minimum. La valeur limite de p_a, obtenue en remplaçant R_B dans le premier membre de (1.2) est appelé seuil de Blake Neppiras and Noltingk (1951)

$$p_B = p_0 + \frac{8}{9}\left[\frac{3\sigma^3}{2R_0^3(p_0 + 2\sigma/R_0)}\right]^{1/2} \tag{1.4}$$

Remarquons que pour cette valeur, la pression $p_0 - p_a$ est négative et correspond à une «tension» du liquide (figure 1.1).

Que représente cette rupture d'équilibre physiquement ? A l'équilibre, le terme de droite de (1.2) représente la pression uniforme dans tout le fluide et est égale à p_R, pression au voisinage de la paroi de la bulle. Au delà du seuil, cette égalité n'est plus possible, et le terme de droite représente la pression infiniment loin de la bulle, négatif et supérieur en valeur absolue à p_R. Il

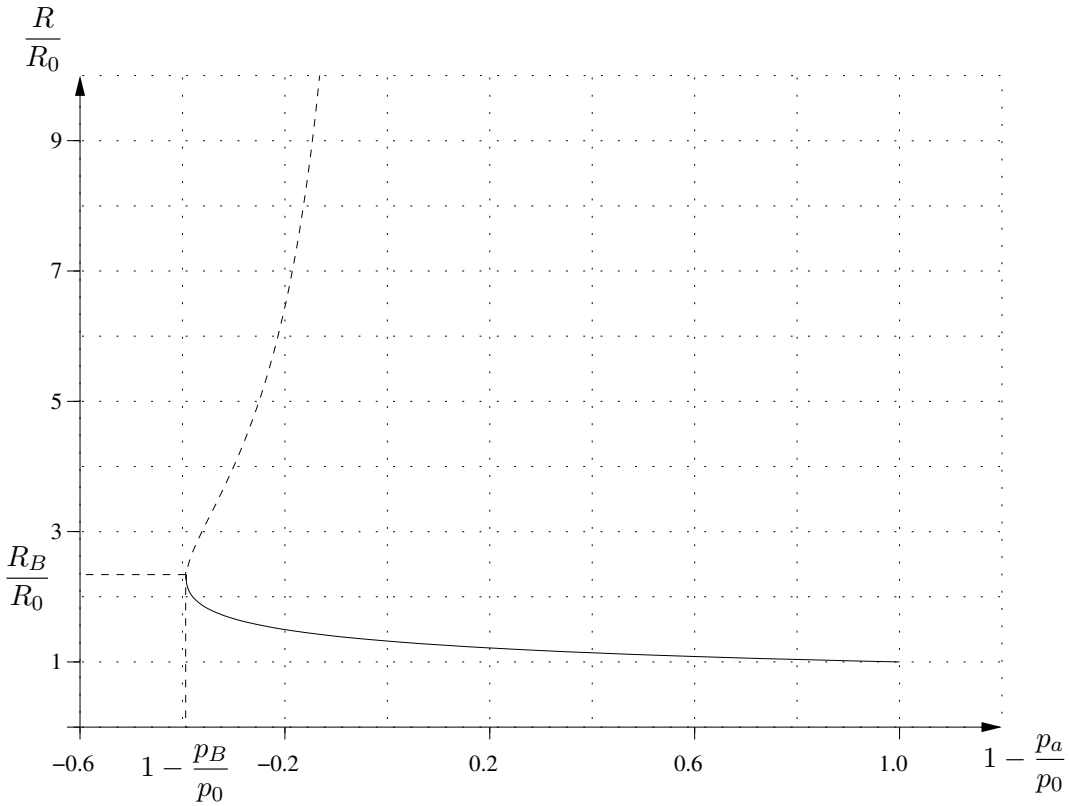


FIGURE 1.1 – Illustration du seuil de Blake : rayon d'équilibre d'une bulle en fonction de la pression dans le liquide environnant ($R_0 = 10^{-6}$, $\sigma/p_0R_0 = 0.67$). La courbe en trait plein est une branche stable et la courbe en pointillé est une branche instable apparaissant pour $p_a > p_0$. Les deux branches se rejoignent au seuil de Blake.

apparaît donc un gradient de pression centrifuge qui met en mouvement le fluide vers l'extérieur : la bulle «explose».

Le système ne peut plus être décrit par des considérations statiques, mais le mouvement du fluide doit être pris en considération. La modélisation dynamique du système conduit comme nous le verrons à une équation différentielle sur le rayon de la bulle [1].

Le seuil de Blake est donc une limite de l'équilibre statique de la bulle lorsqu'elle est soumise à une dépression. Si l'on suppose que par la suite la pression augmente à nouveau, le mouvement explosif est contré par un gradient de pression redevenu centripète, et il arrive un moment où la vitesse radiale du liquide s'annule. Si la bulle a suffisamment «explosé», la pression dans le gaz est très faible, et dans un premier temps, pratiquement aucune force ne s'oppose au retour du liquide vers la bulle : la bulle «implose».

1.2.3 Cavitation acoustique

Le scénario envisagé ci-dessus peut être réalisé par le passage d'une onde acoustique dans le liquide. Si une bulle est initialement stabilisée dans ce liquide, elle sera soumise à une succession de dépressions et de surpressions. Si l'amplitude de ces oscillations est supérieure au seuil de Blake, l'enchaînement explosion-implosion décrit ci-dessus se produira sur une fraction de la période acoustique (voir exemple figure 1.2).

On parle alors de cavitation instable car la bulle implose sur un cycle acoustique, et est susceptible de se fragmenter. Dans le cas où l'amplitude de l'excitation acoustique est plus faible, la bulle oscille de manière stable sur un grand nombre de périodes.

La séparation entre les deux types de comportements se justifie par le raisonnement effectué ci-dessus qui montre clairement que l'explosion, et donc l'implosion consécutive de la bulle se produit au delà d'un certain seuil de dépression.

1. Le seuil de Blake correspond en fait à une bifurcation noeud-col de cette équation différentielle, et correspond à une valeur du paramètre p_a où deux branches stables et instables coalescent.

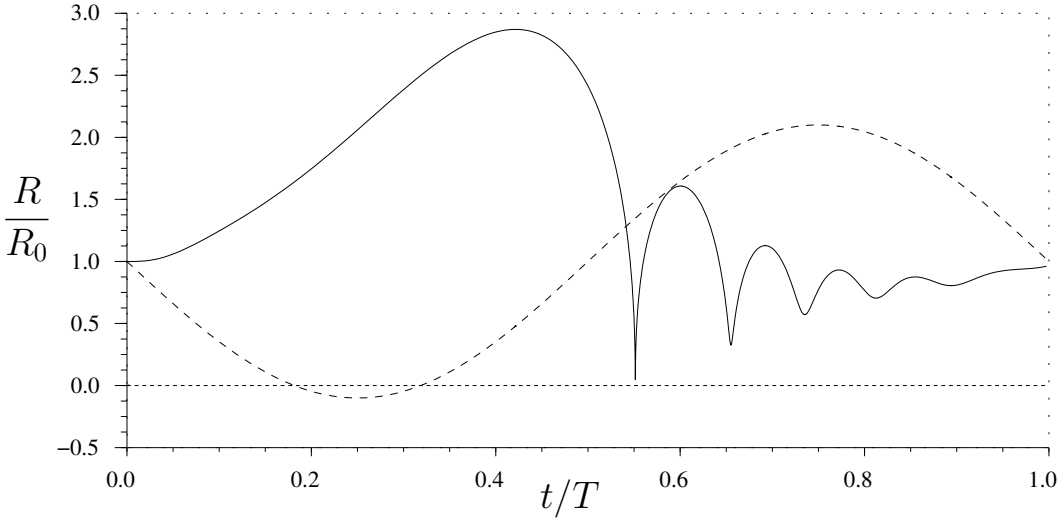


FIGURE 1.2 – Illustration de la cavitation instable (simulation numérique). En traits pleins : rayon de la bulle adimensionnel R/R_0. En traits pointillés : amplitude de la perturbation acoustique $(p_a - p_0)/p_0$. La dépression acoustique entraîne une explosion de la bulle, suivie d'une implosion sur un temps très court. Le rayon minimum atteint est très faible.

1.3 Equations du problème

1.3.1 Introduction

Un système d'équations très général, valable pour une interface liquide-bulle quelconque, tenant compte des transferts thermiques et de masse, a été établi précisément par Hsieh (1965). Le système ainsi formé est bien évidemment difficilement exploitable, mais des hypothèses simplificatrices permettent d'en déduire des modèles plus ou moins simples.

Nous ne présenterons pas ici les modèles traitant des transferts de matière entre le liquide et la bulle, que ce soit par évaporation-condensation ou diffusion de gaz. Notons qu'une équation de mouvement de la bulle très détaillée incluant ces transferts de matière a été établie récemment par Sochard (1996). Les phénomènes de transfert thermiques entre le liquide et la bulle seront abordés dans la section 1.5, et le transfert de gaz à l'interface sera réexaminé au chapitre 5.

Dans un premier temps, nous ne considérons que des phénomènes mécaniques pour établir plusieurs équations de base du problème. La plus simple de ces

équations, basée sur l'hypothèse d'incompressibilité du liquide, a été établie par Rayleigh, puis complétée par d'autres auteurs.

Seront présentées ensuite des équations incluant la compressibilité du liquide, dont la prise en compte est nécessaire pour décrire correctement la fin de la phase d'implosion.

1.3.2 Liquide incompressible

1.3.2.1 Equation de Rayleigh

La première formulation régissant le mouvement radial d'une bulle a été établi par Rayleigh qui a considéré le cas d'une cavité sphérique vide se contractant sous l'influence d'une pression extérieure constante dans un fluide incompressible. Noltingk and Neppiras (1950) ont étendu ce résultat au cas d'une bulle remplie de gaz, qui à l'inverse de la cavité de Rayleigh finit par arrêter son effondrement pour rebondir.

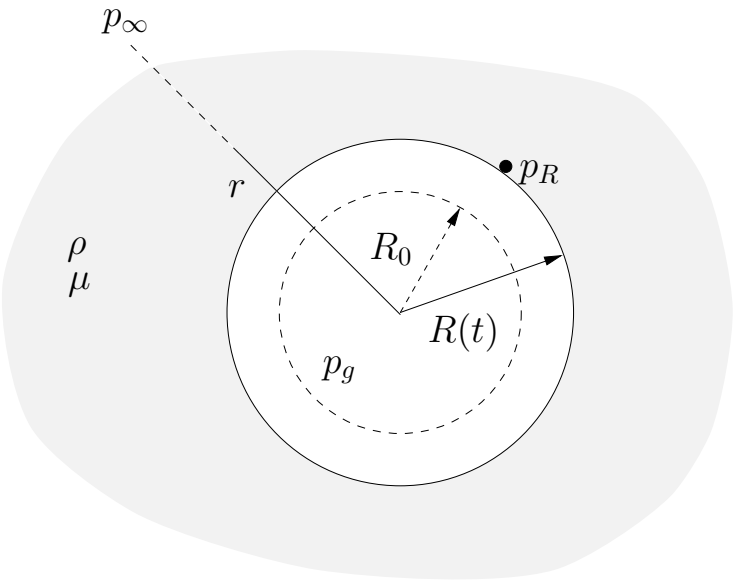


FIGURE 1.3 – Bulle seule en oscillation radiale dans un liquide infini.

Une équation générique, indépendante du contenu de la bulle peut être obtenue simplement de la manière suivante : tout d'abord on fait l'hypothèse que le liquide, qui est généralement très bon conducteur de la chaleur, se comporte comme un réservoir monotherme à la température T_∞, ce qui élimine

l'équation de conservation de l'énergie. L'hypothèse d'incompressibilité implique de plus que le champ de vitesse est à divergence nulle. Ce dernier est alors obtenu simplement en écrivant que la vitesse à l'interface en l'absence de transferts de masse s'écrit $\mathbf{u}(r = R) = \dot{R}$:

$$\mathbf{u} = \frac{\dot{R}R^2}{r^2}\mathbf{e_r} \tag{1.5}$$

En supposant le liquide non visqueux (cette hypothèse sera levée ultérieurement), l'équation de Bernoulli intégrée entre l'infini et la surface de la bulle donne, après calcul :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_R - p_\infty}{\rho} \tag{1.6}$$

où p_R est la pression dans le liquide au voisinage de la bulle et p_∞ la pression à l'infini. La première de ces grandeurs dépend du contenu de la bulle, et la deuxième constitue l'excitation mécanique du système.

1.3.2.2 Pression dans la bulle

L'équation (1.6) ne fait intervenir que le mouvement du liquide, et reste ainsi valable quel que soit le comportement du contenu de la bulle (que nous supposerons composée uniquement de gaz incondensable et parfait). Pour déterminer ce dernier, il faudrait en théorie écrire les équations de conservation dans la phase gazeuse, ainsi que les conditions de continuité à l'interface.

Une première approximation consiste à supposer que le gaz est non visqueux et qu'au cours du mouvement, les transformations qu'il subit sont mécaniquement réversibles, de telle sorte que les gradients de pression dans la bulle sont nuls. Cette hypothèse, sur laquelle nous reviendrons, devient fausse pour des dynamiques très rapides de l'interface. En la supposant vérifiée, l'équilibre mécanique de l'interface de la bulle peut s'écrire simplement

$$p_R = p_g - \frac{2\sigma}{R} \tag{1.7}$$

où p_g, pression uniforme dans la bulle, ne dépend que du temps.

En ce qui concerne le comportement thermique du gaz, on peut également supposer que les gradients de température dans la bulle sont nuls, et que le mouvement est thermiquement réversible. Deux cas limites peuvent être envisagés dans ce cadre :

- la bulle est isolée thermiquement du liquide et les évolutions du gaz sont adiabatiques

– les transferts de chaleur entre la bulle et le liquide sont instantanés, et les évolutions sont isothermes.

Comme nous le verrons ultérieurement, aucune de ces hypothèses n'est uniformément valable, et nous noterons momentanément de manière condensée

$$p_g = p_{g_0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\Gamma} \tag{1.8}$$

où Γ vaut 1 à la limite isotherme et γ à la limite adiabatique.

1.3.2.3 Pression à l'infini

Dans le cas où l'on applique une pression acoustique dans le liquide, la pression à l'infini sera la somme de la pression hydrostatique p_0 et d'une perturbation acoustique que nous supposerons en général sinusoïdale. Par cohérence avec les notations précédente, nous envisagerons cette perturbation comme une dépression p_a soit :

$$p_\infty = p_0 - p_a(t) = p_0(1 - \epsilon \sin \omega t) \tag{1.9}$$

où ϵ mesure l'amplitude de la perturbation acoustique rapportée à la pression hydrostatique.

En reportant les expressions (1.7), (1.8), et (1.9) dans l'équation de Rayleigh (1.6), on obtient la forme classique pour cette dernière :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho} \left[p_{g_0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\Gamma} - \frac{2\sigma}{R} - p_0 + p_a(t) \right] \tag{1.10}$$

1.3.2.4 Interprétation énergétique

Nous verrons ultérieurement que les causes d'amortissement du mouvement radial de la bulle sont liés à trois phénomènes physiques : les transferts thermiques dans la bulle, la viscosité et la compressibilité du liquide. Cet amortissement est généralement présenté plutôt comme une conséquence mathématique de la mise en équation, que comme un principe physique. C'est pourquoi, au fur et à mesure de la présentation des différents phénomènes physiques, nous nous efforcerons de mettre en évidence l'amortissement du mouvement par des considérations énergétiques. Plus précisément, nous calculerons à chaque fois la puissance mécanique fournie au système liquide + bulle par les variations de pression à l'infini, et examinerons sa moyenne sur une période d'oscillation. A cet effet, nous utiliserons :

– Le principe de conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique)

$$\underbrace{\dot{E}}_{\substack{\text{Variation d'énergie}\\ \text{interne}}} + \underbrace{\dot{K}}_{\substack{\text{Variation d'énergie}\\ \text{cinétique}}} = \underbrace{\mathcal{P}_{ext}}_{\substack{\text{Puissance des forces}\\ \text{extérieures}}} + \underbrace{\mathcal{P}_{th}}_{\substack{\text{Puissance calorifique}\\ \text{reçue par le système}}} \tag{1.11}$$

– Le théorème de l'énergie cinétique

$$\underbrace{\dot{K}}_{\substack{\text{Variation d'énergie}\\ \text{cinétique}}} = \underbrace{\mathcal{P}_{ext}}_{\substack{\text{Puissance des forces}\\ \text{extérieures}}} + \underbrace{\mathcal{P}_{int}}_{\substack{\text{Puissance des forces}\\ \text{intérieures}}} \tag{1.12}$$

Replaçons-nous maintenant dans les hypothèses où l'équation (1.10) a été établie : liquide incompressible et inviscide, et pression uniforme dans le gaz. Nous relaxons pour l'instant l'hypothèse de réversibilité thermique des transformations du gaz. Le tableau 1.1 définit les puissances des forces extérieures, intérieures et calorifiques reçues pour les trois systèmes bulle, liquide et interface.

La puissance mécanique fournie au système complet liquide + bulle + interface est notée $\mathcal{P}_{mec}$.

Le tableau 1.2 récapitule le premier principe et le théorème de l'énergie cinétique pour les trois systèmes bulle, liquide et interface.

Ce tableau appelle quelques remarques. Tout d'abord, l'énergie cinétique dans le liquide peut être facilement calculée à partir de l'expression de la vitesse (1.5) :

$$K_l = 2\pi\rho R^3 \dot{R}^2$$

et il est facile de voir que le théorème de l'énergie cinétique dans le liquide n'est autre que l'équation (1.6), dont le premier membre représente $\dot{K}/\rho\dot{V}_g$, où V_g est le volume de la bulle.

Par ailleurs, il est remarquable de voir que l'énergie cinétique du gaz est nulle. Ce point paradoxal est une conséquence directe de l'hypothèse de pression uniforme, et traduit la réversibilité mécanique des transformations du gaz. Il s'agit là d'un cas limite classique en thermodynamique dont la validité fixe bien évidemment une borne supérieure sur la vitesse radiale de la bulle. Cette hypothèse sera réexaminée en détail dans la section 1.5.

Introduisons à nouveau l'hypothèse de réversibilité thermique : la température dans la bulle est uniforme et la bulle peut être considérée comme un système thermodynamique en équilibre dont l'énergie interne est donnée par

	$\mathcal{P}_{ext}$	$\mathcal{P}_{int}$	$\mathcal{P}_{th}$
Gaz	$-p_g\dot{V}_g$	$\iiint_{V_g} p_g \operatorname{div} \mathbf{u}_g \, dV$ $= p_g\dot{V}_g$ si p_g uniforme	$-\dot{Q}$
Liquide	$\iint_{A_R^+} -p\mathbf{u}.\mathbf{n} \, dA + \iint_{A_\infty} -p\mathbf{u}.\mathbf{n} \, dA$ $= p_R\dot{V}_g + \mathcal{P}_{mec}$	$\iiint_{V_l} p \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV$ $= 0$ en incompressible	$\dot{Q} - \dot{Q}_\infty$
Interface	$p_g\dot{V}_g - p_R\dot{V}_g$		

TABLE 1.1 – Puissance des forces extérieures, intérieures, et calorifiques reçues pour le gaz, le liquide, et l'interface. Le liquide est supposé inviscide et incompressible.

	Conservation de l'énergie	Théorème de l'énergie cinétique	Différence
Gaz	$\dot{E}_g + \dot{K}_g = -p_g\dot{V}_g - \dot{Q}$	$\dot{K}_g = -p_g\dot{V}_g + p_g\dot{V}_g = 0!!$	$\dot{E}_g = -p_g\dot{V}_g - \dot{Q}$ (1.13)
Liquide	$\dot{E}_l + \dot{K}_l = p_R\dot{V}_g + \mathcal{P}_{mec} + \dot{Q} - \dot{Q}_\infty$	$\dot{K}_l = p_R\dot{V}_g + \mathcal{P}_{mec}$ (1.14) = Equation de Rayleigh	$\dot{E}_l = \dot{Q} - \dot{Q}_\infty$
Interface	$\sigma\dot{A}_g = p_g\dot{V}_g - p_R\dot{V}_g$ (1.15)		

TABLE 1.2 – Conservation de l'énergie, théorème de l'énergie cinétique et différence.

la relation de Gibbs

$$\dot{E}_g = -p_g \dot{V}_g + T_g \dot{S}_g$$

et en comparant cette relation avec l'expression de l'énergie interne de la bulle, la quantité de chaleur cédée par le liquide est alors $-\dot{Q} = T_g \dot{S}_g$, qui correspond bien à un échange de chaleur réversible. Il n'y a pas de production d'entropie. Dans la limite isotherme réversible, la bulle garde son énergie interne constante ($\dot{E}_g = 0$) et tout le travail des forces de pression et de tension superficielle est converti en chaleur ; dans la limite adiabatique réversible, $\dot{Q} = 0$, et ce travail est dissipé en énergie interne de la bulle.

Le saut de pression à l'interface est une conséquence directe de la conservation de l'énergie de cette dernière.

Enfin, estimons la puissance mécanique fournie au système liquide + bulle . Cette puissance s'écrit d'après le théorème de l'énergie cinétique dans le liquide :

$$\begin{aligned} P_{mec} &= \dot{K}_l - p_R \dot{V}_g \\ &= \dot{K}_l - p_g \dot{V}_g + \sigma \dot{A}_g \end{aligned} \tag{1.16}$$

Dans les deux cas limites réversibles, isotherme ou adiabatique, $-p_g \dot{V}_g$ peut être exprimé sous la forme d'une variation d'énergie potentielle de compression E_{p_g} ; le terme $\sigma \dot{A}_g$ est une variation d'énergie potentielle de déformation de l'interface E_{p_σ}, et la relation (1.16) indique que la puissance mécanique fournie au système liquide + bulle est égale à sa variation d'énergie mécanique :

$$P_{mec} = \dot{K} + \dot{E}_{p_g} + \dot{E}_{p_\sigma} \tag{1.17}$$

Cette relation peut être interprétée aussi comme le théorème de l'énergie cinétique pour le système liquide + bulle + interface, dans lequel les forces intérieures dérivent toutes d'un potentiel.

L'énergie mécanique moyenne fournie au système sur un cycle acoustique est donnée par $\oint -p_\infty \dot{V}_g dt$, et il est clair que dans le cas présent, cette puissance est nulle. En ce sens le système est non dissipatif, ce qui est logique conformément aux hypothèses sur la réversibilité des transformations du gaz et de l'absence de forces visqueuses dans le liquide.

Une illustration pratique de cette conservativité peut-être imaginée en déplaçant légèrement la bulle de son rayon d'équilibre tout en maintenant la pression constante à l'infini : la bulle oscille alors indéfiniment autour de son rayon d'équilibre sans amortissement, avec un échange permanent entre l'énergie cinétique du liquide et l'énergie potentielle de compression de la bulle.

1.3.2.5 Effet de la viscosité du liquide

Le tenseur des contraintes dans le liquide (incompressible) s'écrit

$$\mathbf{\Sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{\Sigma}_v \tag{1.18}$$

où $\mathbf{\Sigma}_v$ est proportionnel au tenseur de vitesse de déformation

$$\mathbf{\Sigma}_v = 2\mu\mathbf{D} = \mu\left(\mathbf{grad}\,\mathbf{u} + \mathbf{grad}\,\mathbf{u}^T\right) \tag{1.19}$$

et vaut d'après (1.5)

$$\mathbf{\Sigma}_v = \mu\frac{R^2\dot{R}}{r^3}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

Poritsky (1952) a montré que la prise en compte de la viscosité du liquide modifie l'équation de Rayleigh seulement au niveau du saut de pression à l'interface qui devient alors

$$p_R = p_g - \frac{2\sigma}{R} - 4\mu\frac{\dot{R}}{R} \tag{1.21}$$

cette relation résultant de l'écriture de l'équilibre des contraintes normales à l'interface. Remarquons que l'équation de Rayleigh proprement dite (1.6) reste inchangée, ce qui est lié a l'irrotationnalité de l'écoulement. Dans ces conditions, et avec l'hypothèse incompressible, le tenseur des contraintes visqueuses $\mathbf{\Sigma_v}$ est à divergence nulle et n'intervient pas directement dans l'équation de la quantité de mouvement.

Le tableau 1.3 reprend les expressions des puissances des forces extérieures, intérieures et thermiques pour le liquide et l'interface, et le tableau 1.4 reprend la conservation de l'énergie et le théorème de l'énergie cinétique dans le cas d'un liquide visqueux.

La variation d'énergie cinétique du liquide liée aux contraintes visqueuses est nulle, et la puissance des forces visqueuses appliquées à un élément de fluide est entièrement transformé en travail de déformation de l'élément, et donc dissipée en énergie interne [2].

2. Car $(\mathcal{P}_{ext})_{visq.} = \iint_{A_l}(\mathbf{\Sigma}_v.\mathbf{u})\mathbf{n}\ dA = \iiint_{V_l}\mathbf{div}\,(\mathbf{\Sigma}_v.\mathbf{u})\ dV = \iiint_{V_l}\mathbf{\Sigma}_v : \mathbf{grad}\,\mathbf{u}\ dV + \iiint_{V_l}\mathbf{div}\,(\mathbf{\Sigma}_v).\mathbf{u}\ dV$. Le premier terme est $-(\mathcal{P}_{int})_{visq.}$ et le deuxième est nul car $\mathbf{\Sigma}_v$ est à divergence nulle.

	$\mathcal{P}_{ext}$	$\mathcal{P}_{int}$	$\mathcal{P}_{th}$
Liquide	$\iint_{A_R^+} -p\mathbf{u}.\mathbf{n}\, dA + \iint_{A_\infty} -p\mathbf{u}.\mathbf{n}\, dA + \iint_{A_R^+} \mathbf{\Sigma}_v\mathbf{u}.\mathbf{n}\, dA + \iint_{A_\infty} \mathbf{\Sigma}_v\mathbf{u}.\mathbf{n}\, dA$ $= p_R\dot{V}_g + \mathcal{P}_{mec} + 16\pi\mu R\dot{R}^2$	$\underbrace{\iiint_{V_l} p \operatorname{div}\mathbf{u}\, dV}_{=0 \text{ en incompressible}} - \iiint_{V_l} \mathbf{\Sigma}_v : \mathbf{grad}\,\mathbf{u}\, dV$ $= -16\pi\mu R\dot{R}^2$	$\dot{Q} - \dot{Q}_\infty$
Interface	$p_g\dot{V}_g - p_R\dot{V}_g - 16\pi\mu R\dot{R}^2$		

TABLE 1.3 – Définition des puissances des forces extérieures, intérieures et thermique pour un liquide visqueux

	Conservation de l'énergie	Théorème de l'énergie cinétique	Différence
Liquide	$\dot{E}_l + \dot{K}_l = p_R\dot{V}_g + \mathcal{P}_{mec} + 16\pi\mu R\dot{R}^2 + \dot{Q} - \dot{Q}_\infty$	$\dot{K}_l = p_R\dot{V}_g + \mathcal{P}_{mec}$ (1.22) = Equation de Rayleigh	$\dot{E}_l = 16\pi\mu R\dot{R}^2 + \dot{Q} - \dot{Q}_\infty$
Interface	$\sigma\dot{A}_g = p_g\dot{V}_g - p_R\dot{V}_g - 16\pi\mu R\dot{R}^2$ (1.23)		

TABLE 1.4 – Conservation de l'énergie, théorème de l'énergie cinétique et différence

Exprimons enfin l'expression du travail mécanique fourni au système d'après (1.22) :

$$P_{mec} = \dot{K} - p_R \dot{V}_g$$

soit, en utilisant (1.23)

$$\begin{aligned} P_{mec} &= \dot{K} - p_g \dot{V}_g + \sigma \dot{A}_g + 16\pi\mu R\dot{R}^2 \\ &= \dot{K} + \dot{E}_{p_g} + \dot{E}_{p_\sigma} + 16\pi\mu R\dot{R}^2 \end{aligned} \tag{1.24}$$

Cette dernière relation traduit le théorème de l'énergie cinétique pour l'ensemble liquide + gaz + interface. Le quatrième terme est toujours positif et correspond à une puissance de forces intérieures ne dérivant pas d'un potentiel. La puissance mécanique fournie au système sur un cycle acoustique n'est plus nulle : elle est dissipée en chaleur à l'infini.

1.3.3 Effet de la compressibilité du liquide

1.3.3.1 Dérivation générale

L'hypothèse d'incompressibilité du liquide peut être limitante lors de la phase finale de l'implosion : la vitesse de la bulle est telle qu'en fait, le liquide emmagasine de l'énergie potentielle de compression malgré sa faible compressibilité. Les perturbations imposées par le mouvement de la bulle se propagent dans la masse du liquide sous la forme d'une onde sphérique divergente, et induisent une perte d'énergie par rayonnement acoustique. Plusieurs améliorations de l'équation de Rayleigh ont été envisagées pour tenir compte de ce phénomène.

La prise en compte de la compressibilité complique notablement la mise en équation, du fait que l'équation de la conservation de la masse ne prend plus la forme triviale précédente, de telle sorte que le champ de vitesse ne peut plus être déterminé uniquement à partir de cette équation.

Une équation d'état du liquide doit premièrement remplacer l'hypothèse d'incompressibilité. Cette équation peut être envisagée par exemple sous la forme :

$$p = p(\rho, s) \tag{1.25}$$

où s est l'entropie massique. La vitesse du son est alors définie par :

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \tag{1.26}$$

Le liquide peut être de plus considéré comme un fluide parfait, ce qui revient à négliger la dissipation d'énergie liée à la viscosité d'une part, et les transferts thermiques dans le fluide d'autre part. Dans ces conditions, l'écoulement est isentropique [3], et par conséquent irrotationnel puisqu'il l'est initialement. Le champ de vitesse dérive donc d'un potentiel :

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad}\,\phi \tag{1.27}$$

et l'équation d'état s'exprime simplement sous la forme :

$$p = p(\rho) \tag{1.28}$$

A cause du caractère isentropique de l'écoulement, l'enthalpie massique h s'exprime simplement par

$$dh = \frac{dp}{\rho} \tag{1.29}$$

L'équation de conservation de la masse peut ainsi s'exprimer, en fonction du couple de variables (ϕ, h) :

$$\nabla^2\phi + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial r}\frac{\partial h}{\partial r}\right) = 0 \tag{1.30}$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement peut être obtenue directement à partir de l'équation de Crocco :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{rot}\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = T\,\mathbf{grad}\,s - \mathbf{grad}\left(h + \frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\,\mathbf{div}\,\mathbf{\Sigma}_v \tag{1.31}$$

qui, pour un écoulement potentiel, se réduit après intégration à :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathbf{grad}\,\phi)^2 + h = C^{\text{te}} \tag{1.32}$$

Le problème est donc entièrement défini par le système d'équations (1.30)-(1.32), insoluble sans hypothèse complémentaire.

3. Ceci peut paraître contradictoire avec l'hypothèse effectuée précédemment selon laquelle le liquide se comporte comme un réservoir monotherme. En fait, comme nous le verrons, cette dernière hypothèse permet de négliger la couche limite thermique dans le liquide au voisinage de la bulle, considérée comme une source de chaleur. Le caractère isentropique avancé ici se rapporte à la diffusion de la chaleur engendrée par les compressions-détentes du liquide faiblement compressible. Le temps caractéristique de retour à l'équilibre de ces perturbations de température est de l'ordre de λ^2/D avec λ longueur d'onde, et D diffusivité thermique. Les compressions-détentes du liquide seront approximativement adiabatiques si ce temps caractéristique est très supérieur à la période acoustique, soit $f\lambda^2/D = c^2/fD \gg 1$, ce qui est le cas sur une gamme de fréquence très large.

Pour des variations de pression faibles autour de p_0, les expressions de h et c peuvent être écrites selon un développement de Taylor, et au premier ordre, c est constante égale à c_0 et $h = (p - p_0)/\rho_0$.

L'approximation dite "acoustique" consiste à décrire le liquide loin de la bulle par une équation d'onde sphérique linéaire, et le mouvement du liquide proche de la bulle par l'équation de Bernoulli incompressible [4], ces deux cas limites étant obtenus asymptotiquement à partir des équations rigoureuses (1.32)-(1.30).

Plusieurs équations de bulle ont été établies sur ces hypothèses Keller and Kolodner (1956); Trilling (1952). L'équation de Keller s'écrit

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) R\ddot{R} + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right)\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right)\left[p_R - p_\infty\left(t + \frac{R}{c}\right)\right] + \frac{1}{\rho}\frac{R}{c}\frac{dp_R}{dt} \quad (1.33)$$

où p_R et p_∞ représentent toujours respectivement la pression dans le liquide au voisinage de la bulle et à l'infini. Notons que cette équation se ramène à celle de Rayleigh à la limite incompressible où $\dot{R}/c \ll 1$.

L'équation de Gilmore (voir par exemple Cole (1948)) a été longtemps considérée comme l'équation de bulle la plus précise pour rendre compte d'implosions violentes. Basée sur l'approximation de Kirkwood-Bethe [5], son originalité par rapport aux équations citées précédemment réside dans la formulation de l'équation de Bernoulli en enthalpie plutôt qu'en pression. En termes mathématiques, h est conservée dans sa forme intégrale plutôt que développée selon un développement de Taylor. L'équation s'écrit

$$R\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right)\ddot{R} + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right)\dot{R}^2 = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right)H + \frac{R}{C}\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right)\frac{dH}{dt} \quad (1.34)$$

4. Cette approche se justifie intuitivement par le fait qu'au voisinage immédiat de la bulle, la vitesse prend des valeurs importantes, mais les effets de la compressibilité sont négligeables (car $R_0 \ll \lambda$), alors qu'au contraire, loin de la bulle (à une distance de l'ordre de quelques longueurs d'onde), la vitesse est faible mais la compressibilité du liquide entre en ligne de compte.

5. Cette approximation est basée sur le fait qu'une onde sphérique divergente s'écrit sous la forme $\phi = f(t - r/c)/r$ et par conséquent $r\phi_t = f'(t - r/c)$. Cette dernière grandeur est donc constante sur les caractéristiques $dr/dt = c$. En remarquant d'une part que d'après (1.32), $\phi_t = h + u^2/2$, et que l'acoustique non-linéaire fait intervenir une vitesse de propagation égale à $c + u$ plutôt que c, l'approximation de Kirkwood-Bethe s'énonce : la grandeur $r(h + u^2/2)$ est constante sur les caractéristiques $dr/dt = c + u$.

où H est la variation d'enthalpie entre l'interface de la bulle et l'infini, et c la vitesse du son locale :

$$H = \int_{p_\infty}^{p_R} \frac{dp}{\rho} \qquad c = \frac{dp}{d\rho} \tag{1.35}$$

Ces deux grandeurs sont déterminées par la donnée d'une équation d'état du liquide plus précise que la simple donnée de la vitesse du son, en l'occurrence l'équation de Tait :

$$\frac{p+B}{p_0+B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \tag{1.36}$$

Prosperetti and Lezzi (1986) ont effectué une étude systématique à l'aide de développements asymptotiques raccordés entre les deux régions proche de la bulle et loin de la bulle. Les équations obtenues, exactes à des termes d'ordre $(\dot{R}/c)^2$ près, forment une famille définie par les variations d'un paramètre. Les auteurs évaluent leurs performances respectives en comparant leurs solutions à une solution numérique exacte de l'écoulement. Les résultats sont les suivants

- Une formulation en enthalpie de type Gilmore plutôt qu'une formulation en pression, conduit à une solution plus précise en fin d'implosion.
- Les équations de Keller et de Herring-Trilling sont des cas particuliers extrêmes de cette famille d'équations et à ce titre sont mathématiquement équivalentes. La forme de Keller semble malgré tout légèrement plus précise que celle de Herring-Trilling.
- L'équation de Gilmore et celle de Keller formulée en enthalpie présentent approximativement les mêmes performances.

Enfin, des équations exactes à l'ordre supérieur en $\dot{R}/c$ sont obtenues par les mêmes auteurs Lezzi and Prosperetti (1987), qui montrent que les effets de la compressibilité du liquide sont presque totalement intégrés par la formulation à l'ordre 1.

1.4 Dynamique d'oscillation

Nous nous intéressons dans cette section aux solutions des équations régissant le mouvement radial de la bulle présentées plus haut. Ces équations différentielles non-linéaires ne peuvent pas être intégrées de manière analytique, et dans un premier temps, nous nous intéresserons aux oscillations de faible amplitude, obtenues en linéarisant les équations. Ces solutions, bien que ne

reflétant qu'une infime partie de la complexité des oscillations, permettent de définir des grandeurs cruciales comme la fréquence de résonance de la bulle et ses facteurs d'amortissement.

Les solutions générales de l'équation non-linéaire seront ensuite examinées, avec quelques exemples de simulations numériques présentés ici à titre illustratif. La compréhension globale de l'ensemble des solutions de ces équations nécessite ou bien des simulations numériques intensives, ou bien des développements analytiques relativement complexes. Nous présenterons un aperçu de cette thématique basé sur la bibliographie abondante, et de leur relation à divers phénomènes observés expérimentalement.

L'examen des méthodes numériques de résolution est reporté à la section 1.6.

1.4.1 Oscillations linéaires

Lorsque l'amplitude du mouvement radial de la bulle autour de son rayon d'équilibre est supposée faible, les équations précédentes peuvent être linéarisées. Définissons la pression à l'infini et le rayon comme des perturbations sinusoïdales respectivement autour de la pression hydrostatique p_0, et du rayon d'équilibre R_0.

$$p_\infty(t) = p_0 + \frac{1}{2}(Pe^{-i\omega t} + \text{c.c.}) \tag{1.37}$$

$$R(t) = R_0 \left[1 + \frac{1}{2}(Xe^{-i\omega t} + \text{c.c.})\right] \tag{1.38}$$

En linéarisant l'équation de Keller (1.33) (tenant compte la compressibilité du liquide) associée aux expressions (1.21) du saut de pression à l'interface et (1.8) de la pression dans le gaz, on obtient :

$$-\omega^2 X + 2ib\omega X + \omega_0^2 X = AP \tag{1.39}$$

Cette équation représente un oscillateur harmonique amorti de fréquence propre ω_0, de coefficient d'amortissement b et de gain A, donnés par

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\rho R_0^2}\left[3\Gamma p_{g_0} - \frac{2\sigma}{R_0}\right] \tag{1.40}$$

$$2b = \frac{4\mu}{\rho R_0^2} + \frac{\omega^2 R_0}{c} \tag{1.41}$$

$$A = \frac{1}{\rho R_0^2} \tag{1.42}$$

Ici, comme nous avons utilisé l'équation de Keller, le facteur d'amortissement b est la somme de deux contributions, la première liée à la viscosité du liquide, la deuxième liée à sa compressibilité. On retrouve le fait susmentionné que ces deux phénomènes sont des causes d'amortissement des oscillations de la bulle.

L'écriture de (1.8) pour la relation pression-volume implique la réversibilité thermique des transformations du gaz, et l'amortissement lié à la diffusion thermique dans la bulle n'apparaît pas dans l'expression du facteur d'amortissement. Le coefficient Γ dans l'expression (1.40) vaut 1 dans l'hypothèse isotherme et γ dans l'hypothèse adiabatique.

Les amplitudes complexes de la bulle et de la pression acoustique X et P sont reliées par

$$X = \frac{1}{\rho R_0^2} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega} P \tag{1.43}$$

L'amplitude des oscillations est maximale lorsque la fréquence d'excitation est égale à la fréquence de résonance. Elle serait infinie si l'amortissement b était nul.

Le rayon de la bulle est en opposition de phase avec la pression acoustique si $\omega < \omega_0$ et en phase pour $\omega > \omega_0$. Ce dernier cas est assez peu intuitif puisque cela signifie que la bulle se contracte lorsque la pression diminue ! Cependant ce phénomène est classique des oscillateurs linéaires forcés, et pourrait être constaté avec un simple système masse-ressort excité au delà de la résonance.

On définit le *rayon de résonance* R_{res} comme le rayon d'équilibre d'une bulle dont la fréquence de résonance serait celle de l'excitation acoustique. Ainsi, une bulle inférieure à la taille de résonance est excitée à une fréquence inférieure à sa fréquence de résonance et oscille donc en opposition de phase avec la pression acoustique.

Cette grandeur se détermine implicitement à partir de (1.40). Pour une excitation à 20 kHz, elle vaut approximativement 158 μm, alors qu'à 1 MHzil vaut 3.2 μm.

1.4.2 Oscillations non-linéaires

1.4.2.1 Approche générale

Les solutions obtenues dans l'hypothèse linéaire ne représentent qu'une partie infinitésimale du comportement extrêmement complexe des solutions de

l'équation de Rayleigh. Cette dernière étant fortement non-linéaire, son étude ne peut s'envisager que par des méthodes analytiques approchées ou numériques.

La dynamique de la bulle de cavitation a longtemps été un sujet intrigant, du fait de la grande richesse du spectre des oscillations. Avec les progrès effectués dans le domaine de la dynamique non-linéaire, elle a pu être replacée dans un contexte général, et étudiée grâce aux outils mathématiques développés dans ce cadre.

Un système linéaire [6], lorsqu'il est soumis à une excitation sinusoïdale externe, oscille uniquement à la fréquence de l'excitation et à sa fréquence propre. Si le système est de plus dissipatif, son spectre est alors constitué d'une raie unique, et sa fréquence d'oscillation propre n'intervient pas dans le signal. Le système entre en résonance progressivement lorsque la fréquence d'excitation est proche de la fréquence propre.

En revanche, pour un système non-linéaire excité par une fonction sinusoïdale, le contenu fréquentiel des oscillations n'est pas forcément mono-harmonique. Dans le cadre des systèmes dissipatifs auquel nous nous restreindrons ici, le spectre pourra contenir également des multiples nf de la fréquence d'excitation, mais aussi des sous-multiples f/m, ou encore des harmoniques rationnelles pf/q (où n et m sont des entiers et p/q un rationnel). Enfin, un autre type de régime, dit «chaotique» se traduit par des oscillations apériodiques du système.

Les systèmes dynamiques non-linéaires constituent depuis quelques décennies un domaine d'étude à part entière (voir Bergé et al. (1984) pour une introduction) et les oscillations de la bulle de cavitation constituent un exemple théorique Parlitz et al. (1990) et expérimental Lauterborn and Suchla (1984) particulièrement intéressant.

La section suivante présente une approche intuitive des résonances non-linéaires de la bulle de cavitation, accompagnées d'un exemple. Nous rappellerons ensuite, toujours dans le cadre des oscillations de bulle, quelques résultats théoriques sur les systèmes dynamiques. Enfin, une section bibliographique sera proposée accompagnée d'une courte discussion sur un phénomène expérimental classique en cavitation : l'apparition simultanée de bruit et d'une raie à $f/2$ dans le spectre de cavitation.

6. On sous-entend par ce terme un système régi par une équation ou un système différentiel linéaire à coefficients constants

1.4.2.2 Résonances non-linéaires

Lorsque le rapport de la fréquence d'excitation et de la fréquence propre f/f_0 est proche d'un rationnel m/n, un phénomène de résonance (le terme «accrochage» est plutôt employé) peut se produire : l'amplitude de l'oscillation est plus forte dans cette zone, et le spectre s'enrichit de raies à la fréquence f/m et de ses harmoniques.

D'après la terminologie employée par Lauterborn (1976), ces résonances peuvent être classées selon la terminologie suivante.

m	n	Résonance n/m	Plus petite période.
$m = 1$	$n = 1$	principale	$T = 1/f$
$m = 1$	$n = 2, 3, \ldots$	harmonique	$T = 1/f$
$m = 2, 3, \ldots$	$n = 1$	sous-harmonique	$mT = m/f$
$m \geq 2$	$n \geq 2$	ultra-harmonique	$mT = m/f$

Afin de donner une idée de la forme des oscillations pour ces diverses résonances, nous présentons figure 1.4 les oscillations forcées d'une bulle obtenues par résolution numérique de l'équation de Rayleigh, pour lequel le rapport f/f_0 est proche de 2/5.

Afin de bien visualiser le phénomène, nous représentons le résultat sous trois formes différentes :

- La courbe du haut représente le rayon de la bulle en fonction du temps $R(t)$. Les points marqués par le symbole * représentent le début de chaque période acoustique : on voit clairement que la bulle effectue un cycle complet en deux périodes d'oscillations.
- La courbe en bas à gauche est un plan de phase et représente l'évolution de la vitesse radiale $\dot{R}$ en fonction du rayon R. Les points marqués par * ont le même sens que ci-dessus. Le nombre de tours (5) effectués par cette courbe représente le nombre d'oscillations du rayon sur un cycle complet.
- La courbe en bas à droite représente le spectre de $R(t)$ où la raie 1 représente la fréquence acoustique f. On constate la présence d'une raie 1/2 et de ses harmoniques.

Ce cas correspond à un accrochage de type 5/2. On voit clairement sur les courbes que la plus petite période d'oscillation de la bulle est 2 fois la période acoustique et qu'elle effectue 5 oscillations pendant cette période. Ceci explique l'apparition d'une raie à f/2 dans le spectre.

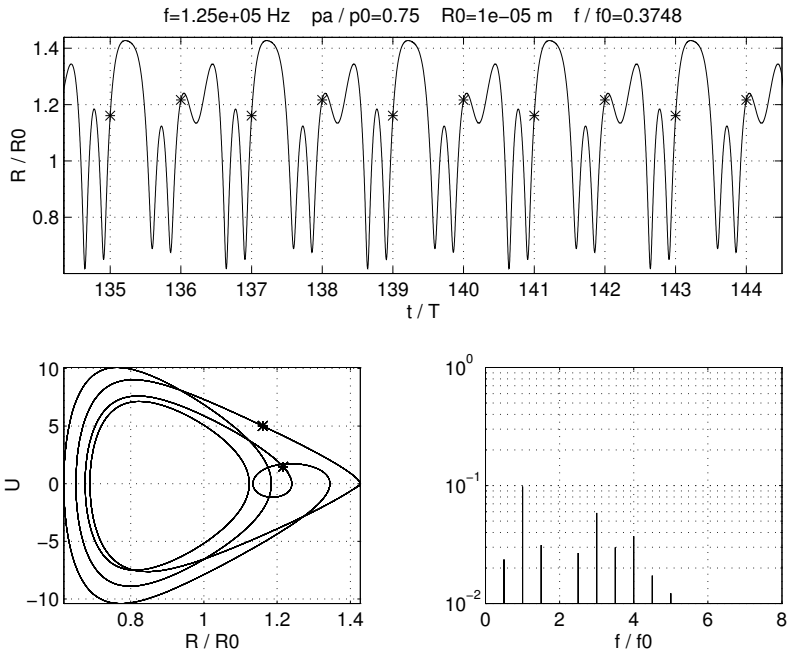


FIGURE 1.4 – Oscillations non-linéaires d'une bulle pour un rapport $f/f_0 \simeq 2/5$. Les trois représentations graphiques montrent clairement que la plus petite l'apparition d'une composante à la fréquence $f/2$.

Il convient de bien comprendre que la fréquence des 5 oscillations correspond *approximativement* à la fréquence propre de la bulle, mais que cette correspondance ne peut être exacte. Le système étant dissipatif, le spectre ne peut contenir que des multiples, sous-multiples ou harmoniques rationnelles de la fréquence d'excitation, mais en aucun cas deux fréquences incommensurables [7].

Il est intéressant de savoir quel est le domaine d'existence d'un accrochage donné lorsque l'on fait varier la fréquence et l'amplitude de l'excitation. Une approche numérique systématique a été effectuée par Lauterborn (1976) qui a résolu l'équation de Rayleigh en balayant l'espace des paramètres (f, p_a, R_0). La figure 1.5 extraite de ces travaux indique l'amplitude d'oscillation d'une bulle de 10 μm en fonction du rapport f/f_0 et pour différentes pressions acoustiques. Ces courbes mettent en évidence la multiplicité des résonances

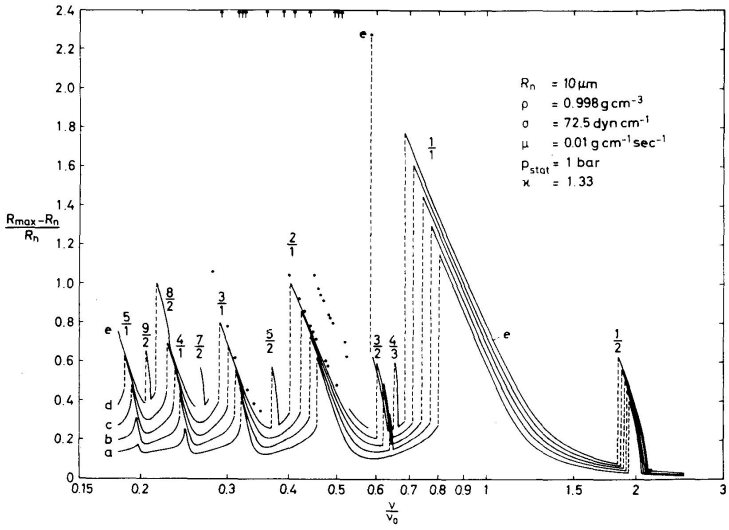


FIGURE 1.5 – D'après Lauterborn (1976) : Amplitude d'oscillation d'une bulle de $10\mu m$. Chaque courbe correspond à une pression acoustique différente : a. $p_a/p_0 = 0.4$, b. $p_a/p_0 = 0.5$, c. $p_a/p_0 = 0.6$, d. $p_a/p_0 = 0.7$, e. $p_a/p_0 = 0.8$. Les labels au dessus des pics indiquent l'ordre des accrochages.

non-linéaires du système. La largeur des pics de résonance augmente avec l'amplitude de l'excitation, et l'apparition ou la disparition d'une résonance s'effectue «par saut». Les points isolés correspondent à des cas ou aucun régime périodique n'a pu être obtenu.

7. C'est-à-dire deux fréquences dont le rapport n'est pas rationnel

1.4.2.3 Bifurcations et chaos

La bulle de cavitation décrite par l'équation de Rayleigh (ou une équation plus complexe) est un exemple typique de système non-linéaire à trois variables d'état (rayon, vitesse radiale et excitation), dépendant de deux paramètres (fréquence et pression acoustique). Le comportement dynamique du système peut être modifié brutalement pour certaines valeurs critiques de ces paramètres. Ces modifications sont appelées "bifurcations".

Les résonances non-linéaires observées sur la figure 1.5 sont des exemples de bifurcation, appelées «noeud-col». Elle correspondent à des transitions entre deux régimes périodiques différents ayant une zone d'existence commune dans l'espace des paramètres (f, p_a, R_0). Le basculement vers l'un ou l'autre de ces régimes dépend des conditions initiales (R_0, U_0) de l'équation différentielle.

La figure (1.5) est obtenue par l'auteur en faisant varier f dans le sens croissant, et c'est pourquoi les bifurcations apparaissent à une fréquence bien déterminée. En fait, le basculement d'un régime à l'autre ne s'effectue pas au même endroit selon que l'on fait varier f dans le sens croissant ou décroissant : il y a hystérésis (figure 1.6).

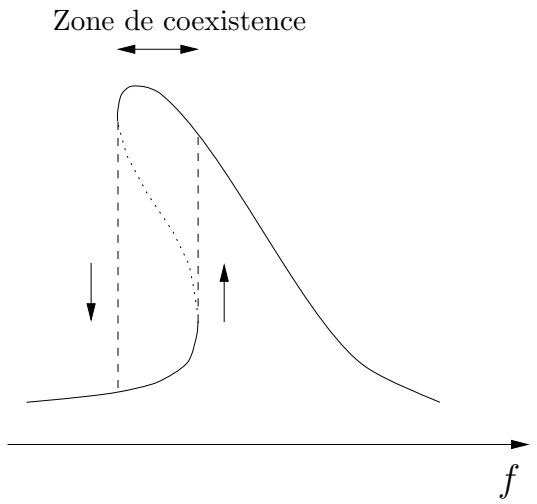


FIGURE 1.6 – Phénomène d'hystérésis dans les résonances non-linéaires.

La figure 1.7 montre une superposition des plans de phase obtenus à gauche et à droite du pic de résonance principal d'une bulle de rayon 10 μm, pour une même amplitude d'excitation et des fréquences très proches. Pour une faible variation de la fréquence acoustique, l'amplitude des oscillations augmente dans un rapport considérable.

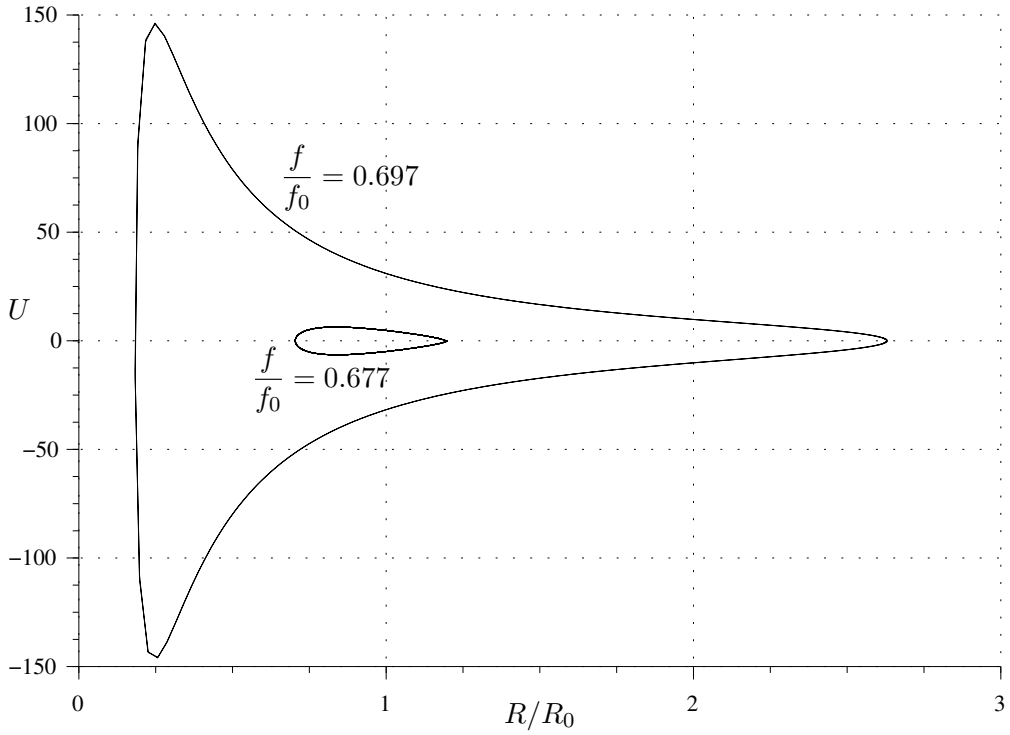


FIGURE 1.7 – Deux plans de phase correspondant à des régimes permanents de chaque coté du pic de résonance 1/1.

Un autre type de bifurcation appelée *doublement de période* ou instabilité sous-harmonique existe pour la bulle de cavitation. A la suite de cette bifurcation, le spectre contient une raie à la fréquence $f/2$ et ses harmoniques. Une modification des paramètres peut conduire ensuite à une cascade de bifurcations sous-harmoniques, introduisant successivement dans le spectre des raies à la fréquence $f/4$, puis $f/8$ etc...

Les figures 1.8 et 1.9 montrent une bifurcation de ce type obtenue en faisant varier le paramètre p_a à partir de l'accrochage d'ordre 4/1. Le pic de résonance noté 8/2 par Lauterborn sur la figure 1.5 correspond en fait à la résonance 4/1 ayant subi une bifurcation doublement de période.

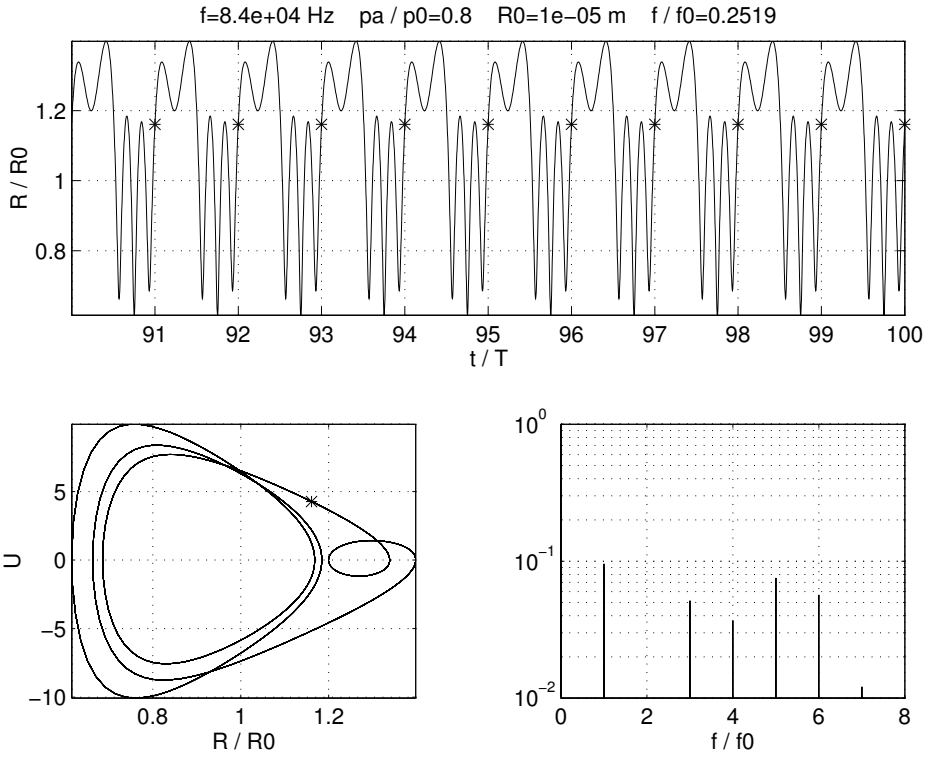


FIGURE 1.8 – Résonance non linéaire 4/1. $R_0 = 10\ \mu m$, $f/f0 = 0.252$, $p_a/p_0 = 0.8$

Les domaines de stabilité paramétrique de ces régimes successifs sont de plus en plus étroits, et cette succession de bifurcations conduit à un régime dit *chaotique*. Il s'agit d'un régime apériodique, très sensible aux conditions initiales, et dont le spectre fait apparaître une composante continue. Ce régime apparemment désordonné cache en fait une certaine structure, que l'on peut

mettre en évidence en représentant dans le plan de phase uniquement un point par période acoustique (ce type de représentation s'appelle section de Poincaré). L'ensemble des points ainsi formé ressemblant à une ligne qui serait partout interrompue, et constitue du point de vue mathématique un ensemble fractal Bergé et al. (1984); Parlitz et al. (1990); Lauterborn and Parlitz (1988).

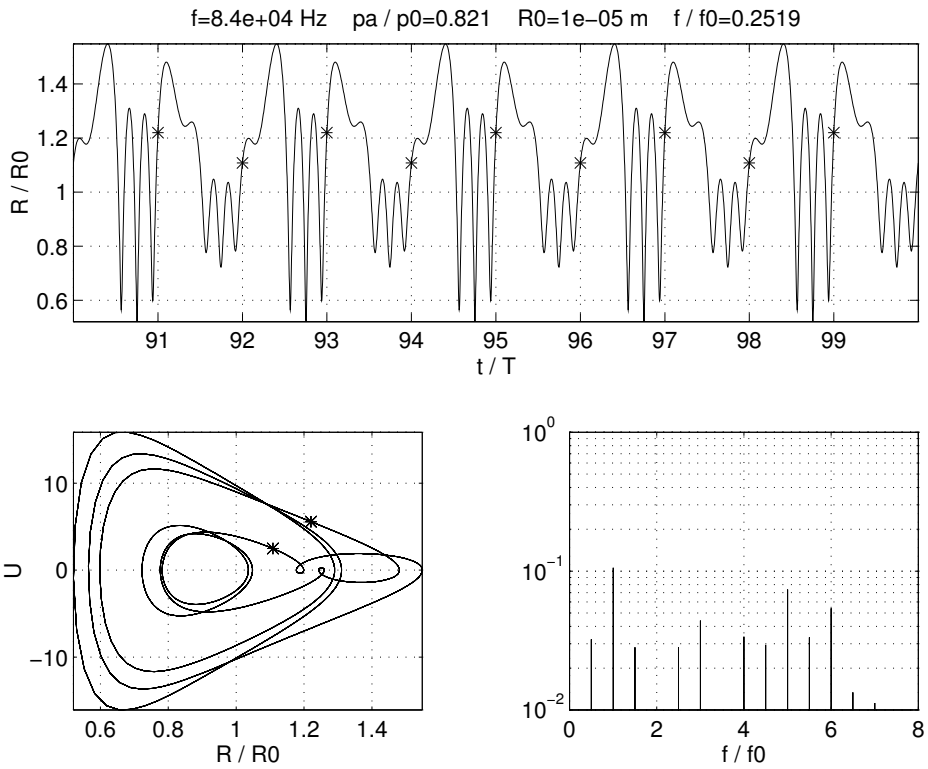


FIGURE 1.9 – Résonance non-linéaire 4/1 après bifurcation sous-harmonique. $R_0 = 10\ \mu m$, $f/f0 = 0.252$, $p_a/p_0 = 0.821$

1.4.2.4 Sous-harmonique 1/2 et bruit de cavitation

Cet ensemble de concepts, qui peuvent sembler abstraits et déconnectés d'une réalité expérimentale, ont permis dans un passé assez récent de résoudre un certain nombre d'interrogations sur des résultats expérimentaux sur la cavitation.

Les premières mesures de pression dans un milieu cavitant (références dans Neppiras (1969)) montrent qu'à partir d'une certaine puissance, du bruit ap-

paraît dans le spectre mesuré. Ce bruit s'explique facilement par l'apparition d'implosions de bulles au-delà du seuil de cavitation instable. Mais systématiquement, ce bruit s'accompagne d'une raie à $f/2$.

La présence de cette raie fut associée dans un premier temps aux oscillations résonantes de bulles dont la fréquence propre serait égale à la moitié de la fréquence acoustique, soit $f = 2f_0$. Cependant, cette hypothèse est rejetée car de telles bulles auraient une taille supérieure à la taille de résonance, et de ce fait seraient éjectées des zones de hautes pression acoustique par les forces de Bjerknes (voir section 5.3).

Plusieurs approches théoriques de l'équation de Rayleigh sont alors envisagées pour expliquer le phénomène : Lauterborn (1976) met en évidence par simulation numérique la diversité des résonances non-linéaires, et montre que les résonances ultraharmoniques du type $(2n + 1)/2$ peuvent introduire une raie $1/2$ dans le spectre (voir spectres des figures 1.4, 1.8, 1.9).

Prosperetti (1974, 1975) calcule analytiquement les conditions d'existence de cette raie au voisinage de la résonance $1/2$. Il montre que la présence ou l'absence de la sous-harmonique est dépendante des conditions initiales, et explique au passage l'apparition par saut des résonances non-linéaires en termes de transition entre deux régimes coexistants. L'auteur indique que son étude de la résonance $1/2$ est transposable aux résonances ultraharmoniques $(2n+1)/2$, plus raisonnablement responsables de la raie à $f/2$. Il suggère alors que les perturbations des conditions initiales requises pour exciter ces résonances seraient fournies par les ondes de choc émises par des bulles instables voisines, ce dernier point expliquant qualitativement l'apparition simultanée de la cavitation forte et de la raie à $f/2$.

Dans une étude expérimentale, Lauterborn and Cramer (1981a) montrent en augmentant graduellement l'excitation acoustique, que des raies ultraharmoniques $(2n + 1)f/2$ apparaissent par sauts, que la raie $3f/2$ est dominante dans chaque cas, et que la raie $f/2$ apparaît simultanément avec celles à $3f/2$ et $5f/2$. Notons que toutes les bulles observées dans cette étude étaient inférieure à la taille de résonance. Pour une excitation suffisante, l'auteur remarque que ces raies s'entourent de bruit. Dans une étude parallèle, Cramer and Lauterborn (1982) montrent que les spectres obtenus expérimentalement sont qualitativement semblables à un spectre calculé numériquement en sommant les radiations de bulles de rayon compris entre 10 μm et 50 μm.

Une interprétation de la relation entre bruit de cavitation et raie sous-harmonique apparaît pour la première fois en termes de bifurcations doublement de période grâce au travail expérimental de Lauterborn and Cramer (1981b). En augmentant lentement la pression acoustique, les auteurs font apparaître suc-

cessivement des raies à $f/2$, $f/4$, $f/8$ et enfin du bruit de cavitation. Le chemin inverse est observé en continuant à augmenter l'excitation. Cette séquence de bifurcations appelée «route sous-harmonique vers le chaos» est désormais bien connue et inhérente à de nombreux systèmes dynamiques Bergé et al. (1984).

Ce phénomène est clairement mis en évidence par Lauterborn and Parlitz (1988); Parlitz et al. (1990) qui balayent numériquement l'espace des paramètres (p_a, f) pour une bulle de 10 μm. Les auteurs visualisent les résultats sous forme de diagramme de bifurcations, dont la figure 1.10 montre trois exemples. Pour chaque fréquence, l'amplitude de l'oscillation est recueillie une fois par période acoustique. Si l'oscillation a pour période 1, on obtient un seul point ; si l'oscillation a pour période 2, on obtient 2 points, et ainsi de suite. Si le régime est apériodique, on obtient une infinité de points. Les branches simples correspondent donc a des oscillations de période 1, les branches doubles à des oscillations de période 2, et les zones «grisées» correspondent à des oscillations chaotiques. Dans certaines zones deux branches coexistent pour une même fréquence, ce qui correspond au phénomène d'hystérésis mentionné plus haut. Les ordres des résonances $R_{m,n}$ correspondent aux résonances notées précédemment n/m.

Les trois figures correspondent à des amplitudes d'excitation respectives de 80, 85 et 90 kPa. Le dédoublement des branches correspondant à des bifurcations doublement de période évoluant vers un régime chaotique apparaît clairement (voir par exemple les évolutions des résonances 3/2 et 5/2 entre les figures 1.10.a et 1.10.b). La figure 1.10.c montre de nombreuses zones de chaos, et les zones d'oscillations de période 1 sont quasiment inexistantes.

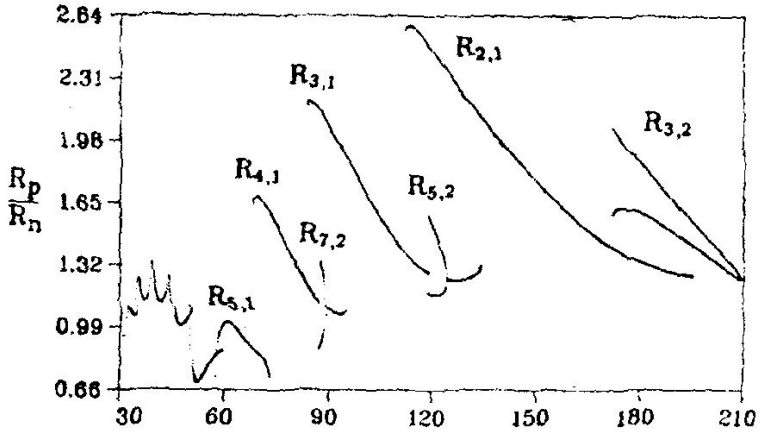
De par leur mode d'apparition par doublement de période, les zones de chaos sont de plus très proches des zones de période 2 dans l'espace des paramètres et la connection expérimentale entre les deux phénomènes est donc bien confirmée par l'étude théorique d'une seule bulle de cavitation.

1.5 Effets thermiques

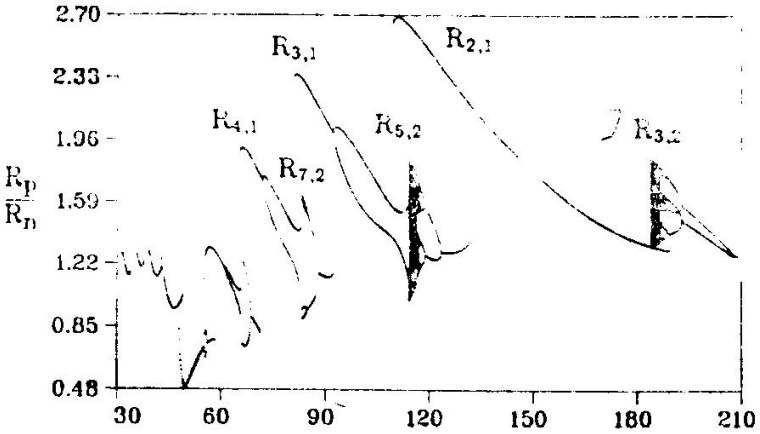
1.5.1 Introduction

1.5.1.1 Approche intuitive

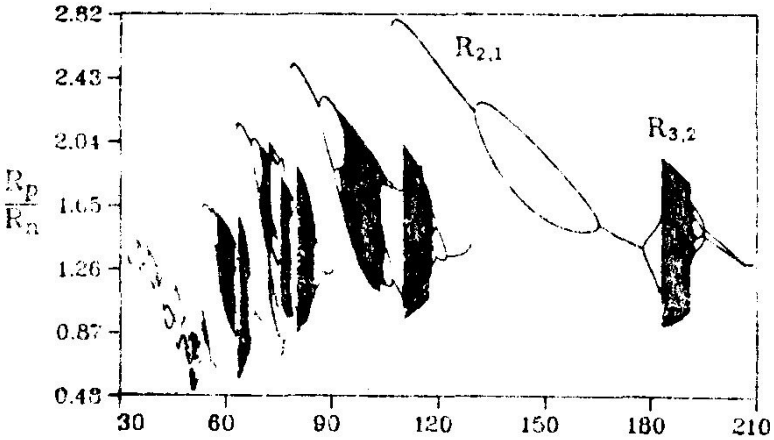
Nous avons présenté précédemment le comportement du gaz dans deux cas extrêmes : l'hypothèse isotherme ou l'hypothèse adiabatique. Ces deux com-



(a) Excitation de 80 kPa.



(b) Excitation de 85 kPa.



(c) Excitation de 90 kPa.

FIGURE 1.10 – D'après Parlitz et al. (1990) : Diagrammes de bifurcation pour une bulle de 10 μm pour trois amplitudes d'excitation différentes. En abscisse fréquence acoustique en kHz ; en ordonnée, amplitude de l'oscillation de la bulle échantillonnée à la fréquence acoustique.

portements correspondent respectivement aux cas où le temps de relaxation thermique du gaz est très rapide devant les oscillations de la bulle ou bien au contraire très lent. Aussi, intuitivement, on pressent que le comportement isotherme sera une bonne approximation pour des oscillations à basse fréquence alors que le comportement adiabatique sera au contraire vraisemblable pour des oscillations à haute fréquence. Cette remarque en amène une autre : il existe un domaine de fréquence où ni l'une ni l'autre de ces approximations ne sera justifiée.

Le phénomène de diffusion thermique dans la bulle peut être quantifié par un temps caractéristique égal à R_0^2/D, ou D est la diffusivité thermique du gaz. Le rapport $\chi = D/\omega R_0^2$ de la période d'oscillation à ce temps caractéristique régit donc à priori le comportement thermique du gaz : pour $\chi \ll 1$, on peut s'attendre à un comportement adiabatique et pour $\chi \gg 1$ à un comportement isotherme.

Si la diffusion thermique n'est ni nulle ni instantanée, on conçoit aisément que les transformations du gaz soient irréversibles, de telle sorte qu'une partie de l'énergie fournie sur un cycle au système liquide + bulle est dissipée en énergie interne dans le liquide. De ce fait, le mouvement de la bulle subit un amortissement, et dans le cadre d'oscillations linéaires forcées, cet amortissement peut être quantifié par une constante b similaire à celle intervenant dans l'équation (1.39)).

Cette constante a été initialement calculée par C. Devin (1959) qui obtient une expression valable seulement à la résonance. Ces résultats sont améliorés par Eller (1970) qui obtient un facteur d'amortissement valable quelle que soit la fréquence des oscillations. Toujours dans le cadre linéaire, Prosperetti (1977b) dérive une formulation plus complète tenant compte d'éventuelles inhomogénéités de pression dans la bulle et de la conductivité thermique finie du liquide.

Les mesures de Crum (1983) ont montré l'insuffisance de la théorie linéaire, et Prosperetti et al. (1988) ont établi un système général d'équations non-linéaires que nous rappelons dans un premier temps. Nous présentons ensuite une interprétation physique de ce modèle illustrée par un exemple traité numériquement. Les résultats obtenus dans le cadre linéaire seront ensuite présentés et les notions d'exposant polytropique et de viscosité ajoutée seront introduits. Une discussion bibliographique sur la validité générale de ces concepts sera proposée, et nous présenterons enfin une méthode numérique efficace Kamath and Prosperetti (1989) applicable à la résolution complète du modèle thermique.

1.5.1.2 Hypothèses et ordres de grandeurs

Nous rappelons brièvement ci-dessous un calcul d'ordres de grandeurs effectué par Prosperetti et al. (1988) pour justifier l'hypothèse de pression uniforme dans la bulle et de température uniforme dans le liquide.

Considérons la phase de compression de la bulle, sur une demi-période, et notons T_C, T_R et T_∞ les températures respectivement au centre de la bulle, à l'interface et à l'infini. On note par ailleurs d_g et d_l les longueurs de pénétration thermique au voisinage de l'interface respectivement du coté gaz et du coté liquide (voir figure 1.11 pendant une période d'oscillation $1/\omega$. La continuité du flux de chaleur à l'interface s'écrit alors approximativement

$$\lambda_g \frac{T_C - T_R}{d_g} = \lambda_l \frac{T_R - T_\infty}{d_l} \tag{1.44}$$

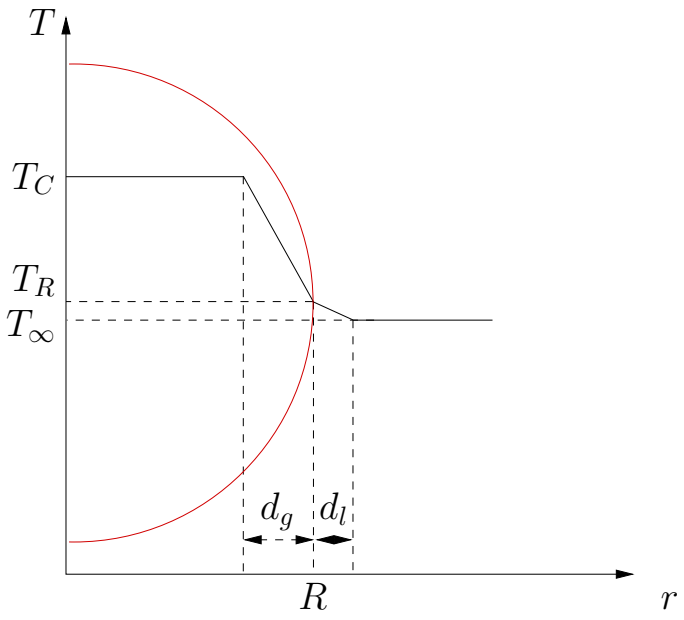


FIGURE 1.11 – Profil de température approximatif dans la bulle et dans le liquide lors de la compression.

Par ailleurs, sur la demi-période de compression, les longueurs de pénétration thermique dans le gaz et le liquide ont pour ordre de grandeur :

$$d_g^2 = D_g \frac{T}{2} \qquad d_l^2 = D_l \frac{T}{2} \tag{1.45}$$

En remplaçant ces expressions dans (1.44), on voit que le rapport des perturbations thermiques dans le liquide et dans le gaz est dans le rapport inverse

gaz	Air	Argon	CO_2
$\dfrac{T_R - T_\infty}{T_C - T_R}$	$3.46\ 10^{-3}$	$2.43\ 10^{-3}$	$3.16\ 10^{-3}$
$\dfrac{d_l}{d_g}$	$8.08\ 10^{-2}$	$8.28\ 10^{-2}$	0.12

des effusivités thermiques

$$\frac{T_R - T_\infty}{T_C - T_R} \simeq \left(\frac{\lambda_g \rho_g c_{p_g}}{\lambda_l \rho_l c_{p_l}}\right)^{1/2} \tag{1.46}$$

Le tableau suivant donne les valeurs de cette grandeur ainsi que le rapport d_l/d_g pour différents gaz dans l'eau. Ce résultat montre que la température du liquide peut être considérée comme uniforme égale à T_∞.

Examinons maintenant l'hypothèse de pression uniforme dans la bulle. L'équation de conservation de la quantité de mouvement dans le gaz s'écrit

$$\rho_g \left(\frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial r}\right) = -\frac{\partial p_g}{\partial r} \tag{1.47}$$

En balançant le premier terme du premier membre et le second membre, on a

$$\rho_{g_0} \dot{R} \omega \simeq \frac{\Delta p_g}{R_0} \tag{1.48}$$

La variation relative de la pression entre le centre de la bulle et l'interface est donc approximativement, en remarquant que la vitesse du son dans le gaz est de l'ordre de $(p_{g_0}/\rho_{g_0})^{1/2}$

$$\frac{\Delta p_g}{p_{g_0}} \simeq \frac{\rho_{g_0}}{p_{g_0}} R_0 \omega \dot{R} \simeq \frac{R_0 \omega \dot{R}}{c_g^2} \simeq \frac{R_0}{\lambda}.\,\mathrm{Ma} \tag{1.49}$$

où Ma est le nombre de Mach de la bulle, rapport entre la vitesse de l'interface et celle du son dans le gaz, et λ la longueur d'onde dans le gaz à la fréquence ω.

Selon un raisonnement similaire, l'équilibre entre le second terme du premier membre et le second membre de (1.47) conduit à

$$\frac{\Delta p_g}{p_{g_0}} \simeq \frac{p_{g_0}}{\rho_{g_0}} \dot{R}^2 \simeq \mathrm{Ma}^2 \tag{1.50}$$

En résumé, il apparaît que la variation spatiale relative de la pression dans la bulle est d'ordre

$$\frac{\Delta p_g}{p_{g0}} = O\left(\frac{R_0}{\lambda}.\,\mathrm{Ma}, \mathrm{Ma}^2\right) \tag{1.51}$$

L'hypothèse pression uniforme est donc justifiée sous réserve que :

- la longueur d'onde dans le gaz soit très supérieure au rayon d'équilibre de la bulle, ce qui peut être mis en défaut pour des hautes fréquences ou des bulles de grande taille.
- la vitesse radiale de la bulle soit très inférieure à la vitesse du son dans le gaz, ce qui ne sera plus le cas lors d'implosions violentes intervenant dans la cavitation instable.

Prosperetti (1991) a calculé rigoureusement la correction à l'ordre 1 en Ma^2 de la variation de pression dans la bulle dans le cadre linéaire, et montre que cette correction est faible et quasiment indépendante de la fréquence et du rayon d'équilibre de la bulle.

1.5.2 Modélisation

1.5.2.1 Mise en équation

Le but ultime est d'obtenir une relation pression-volume pour la bulle. Le problème est entièrement décrit par les équations de conservation de la masse, quantité de mouvement et de l'énergie (prise ici sous forme enthalpique, voir annexe A) dans le gaz

$$\frac{d\rho_g}{dt} + \rho_g \,\mathrm{div}\,\mathbf{u_g} = 0 \tag{1.52}$$

$$\rho_g \frac{d\mathbf{u_g}}{dt} = -\,\mathbf{grad}\,p_g \tag{1.53}$$

$$\rho_g \frac{dh_g}{dt} - \frac{dp_g}{dt} = \mathrm{div}\,(\lambda(T)\,\mathbf{grad}\,T) \tag{1.54}$$

Notons que la conductivité thermique λ n'est pas sortie de l'opérateur div car sa dépendance par rapport à la température doit être envisagée, cette dernière pouvant atteindre des valeurs élevées lors de fortes compressions de la bulle.

L'hypothèse de température constante et uniforme dans le liquide permet d'éviter d'écrire la conservation de l'énergie dans ce dernier, et les conditions

à l'interface de la bulle s'écrivent [8]

$$u_g(r = R) = \dot{R} \tag{1.55}$$

$$T(r = R(t), t) = T_\infty \tag{1.56}$$

La symétrie sphérique du problème impose la nullité du flux au centre de la bulle

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \tag{1.57}$$

A ce système, il faut ajouter l'équation d'état du gaz, que l'on supposera parfait

$$\frac{p_g}{\rho_g} = rT = c_p \frac{\gamma - 1}{\gamma} T \quad \text{et} \quad dh = c_p dT \tag{1.58}$$

La combinaison de ces équations associées à l'hypothèse de pression uniforme dans la bulle permet d'obtenir le système suivant reliant les inconnues p_g, T, u_g et R

$$u_g = \frac{1}{\gamma p_g}\left[(\gamma - 1)\lambda \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{3} r \dot{p_g}\right] \tag{1.59}$$

$$\dot{p_g} = \frac{3}{R}\left[(\gamma - 1)\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_R - \gamma p_g \dot{R}\right] \tag{1.60}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_g}{T}\left[\frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial r}\right] - \dot{p_g} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{1.61}$$

L'équation manquante est constituée par une équation de dynamique de bulle reliant p_g et R.

1.5.2.2 Interprétation physique

Tout d'abord, nous montrons que les équations (1.59) et (1.60) reflètent bien les deux limites isothermes et adiabatiques, sachant que $-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$ représente le flux de chaleur.

Dans le cas isotherme, le flux de chaleur à l'interface peut s'écrire $\psi_R = \dot{Q}/4\pi R^2$ où $\dot{Q}$ est la puissance calorifique cédée par la bulle. Nous avons vu que cette puissance équilibrait la puissance des forces extérieures $-p_g \dot{V}_g$

8. La conservation du flux à l'interface ne doit pas être écrite, à cause de l'hypothèse de température uniforme dans le liquide, qui ne prend pas en compte la couche limite thermique coté liquide.

(équation (1.13 avec $\dot{E}_g = 0$) . En remplaçant le flux par $-p_g\dot{V}_g/4\pi R^2 = -p_g\dot{R}$ dans (1.60), on obtient

$$\frac{\dot{p}_g}{p_g} = -3\frac{\dot{R}}{R}$$

qui est bien la relation $p_gV_g = Cte$ sous forme différentielle.

Par ailleurs, l'intégration de l'équation de l'énergie (1.54) avec $dh/dt = 0$ permet d'obtenir le flux dans la bulle sous la forme [9]

$$\psi(r) = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{3}\dot{p}_g r$$

et d'après (1.59) la vitesse du gaz dans la bulle

$$u_g = -\frac{1}{3}\frac{\dot{p}_g}{p_g}r = \dot{R}\frac{r}{R}$$

Dans le cas adiabatique le flux est nul, et on obtient

$$\frac{\dot{p}_g}{p_g} = -3\gamma\frac{\dot{R}}{R}$$

qui est la relation $p_gV_g^\gamma = Cte$ sous forme différentielle. De plus la relation (1.59) fournit alors la vitesse sous la forme

$$u_g = -\frac{1}{3\gamma}\frac{\dot{p}_g}{p_g}r = \dot{R}\frac{r}{R}$$

Remarquons que dans ces deux cas extrêmes, pression gaz et rayon sont exactement en opposition de phase : toute variation de pression imposée à l'extérieur est immédiatement répercutée sur le volume de la bulle. La vitesse du gaz est en phase avec la vitesse de l'interface et change de sens uniformément aux points de compression et de détente maximales.

Afin de comprendre l'influence du caractère non instantané de la diffusion thermique, examinons la phase de compression : le gaz au centre de la bulle s'échauffe alors que celui qui est au contact du liquide est continuellement refroidi par ce dernier. Le flux de chaleur au centre est beaucoup plus faible qu'au voisinage du liquide : le centre de la bulle emmagasine de l'énergie

9. Il peut paraître paradoxal que le flux soit non nul dans la mesure où dT/dr doit être nul dans le cas isotherme. Cette contradiction s'explique par le fait que ce cas limite est caractérisé par une conductivité thermique λ infinie et le rapport $\lambda dT/dr$ reste donc fini !

interne alors que le gaz au voisinage de la bulle élimine le travail de compression en chaleur. En ce sens, le centre de la bulle se comporte de façon adiabatique alors que la couche externe se comporte de façon isotherme.

Lorsque l'on approche la fin de la compression, la vitesse radiale diminue en valeur absolue, et il arrive un moment où la puissance des forces de pression compense exactement la puissance calorifique perdue par la bulle. L'énergie interne de la bulle commence à diminuer alors que la bulle est toujours en contraction.

Ce résultat peut être mis en évidence en écrivant le premier principe pour la bulle toute entière (équation (1.13))

$$\dot{E}_g = -p_g \dot{V}_g - \dot{Q}$$

$\dot{Q}$ étant la puissance calorifique cédée par la bulle au liquide. On montre facilement [10] que le second membre s'écrit

$$\dot{E}_g = -p_g \dot{V}_g - \dot{Q} = \frac{1}{\gamma - 1} \left(\dot{p}_g V_g + p_g \dot{V}_g \right) \tag{1.62}$$

L'énergie interne de la bulle passe par un maximum pour $\dot{V}_g = -\dot{Q}/p_g < 0$, c'est-à-dire toujours dans la phase de contraction. Ensuite, p_g passe par un maximum lorsque $\dot{V}_g = -(1 - 1/\gamma)\dot{Q}/p_g < 0$ donc toujours dans la phase de contraction. Par conséquent, p_g commence à diminuer alors que la bulle est toujours dans la phase de contraction, et est donc en avance de phase sur le volume V_g (voir figure 1.12).

La bulle effectue un cycle qui ne peut être que récepteur puisqu'elle n'est en contact qu'avec une seule source monotherme. Elle consomme de l'énergie mécanique et produit de l'entropie, à cause de l'irréversibilité liée aux gradients de température. Reprenons l'expression (1.16) de l'énergie mécanique totale fournie au système liquide+bulle

$$P_{mec} = \dot{K} - p_g \dot{V}_g + \sigma \dot{A}_g \tag{1.63}$$

$p_g \dot{V}_g$ ne peut plus être exprimé comme la dérivée d'un énergie potentielle. L'intégrale sur un cycle $\oint -p_g \dot{V}_g dt$ est positive et la puissance mécanique fournie au système liquide+bulle sur un cycle est aussi positive : les phénomènes thermiques dans la bulle sont une cause de dissipation et donc d'amortissement du mouvement.

10. En multipliant 1.60 par V_g.

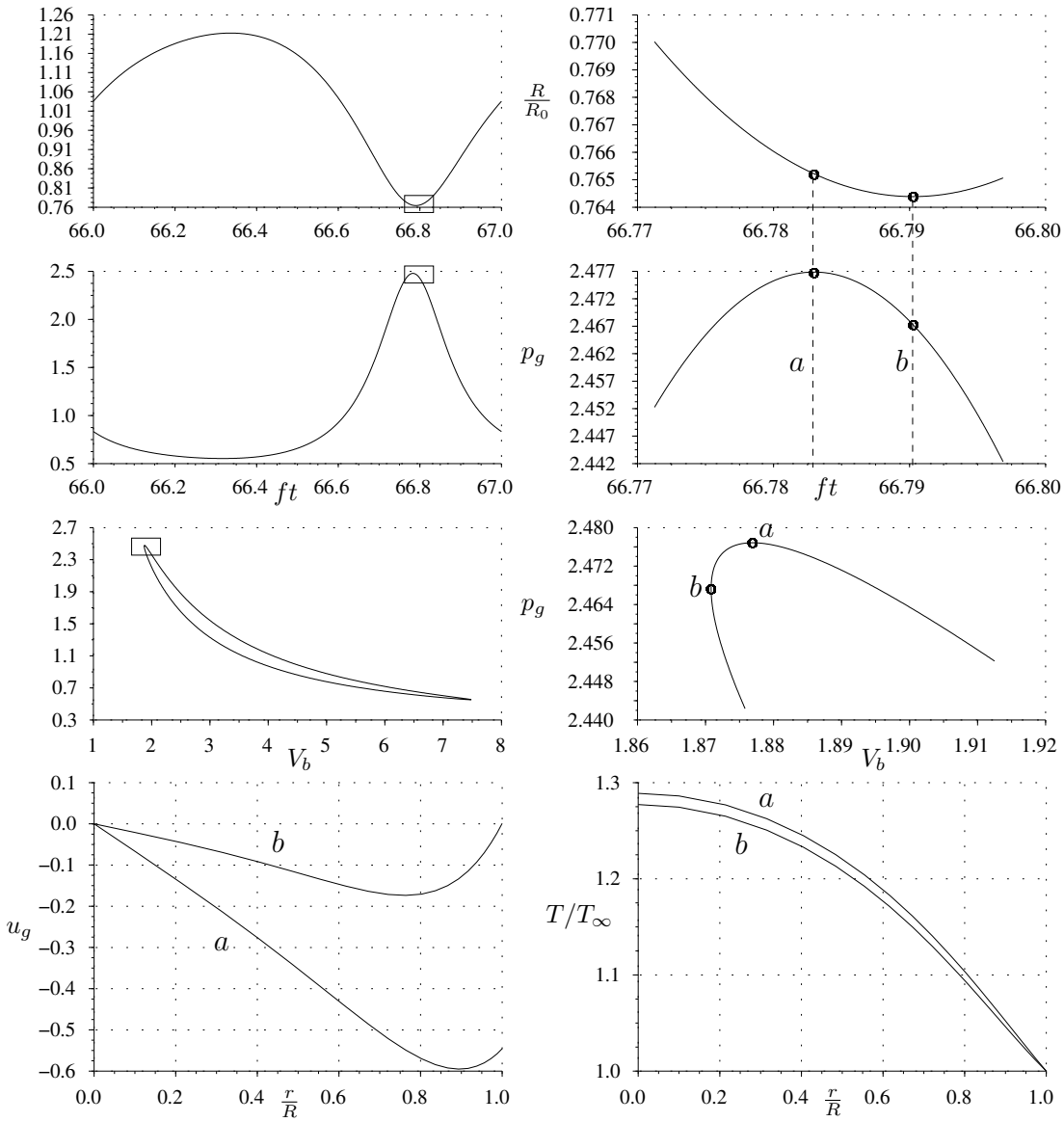


FIGURE 1.12 – Simulation numérique des effets thermiques dans la bulle pour une bulle de 10 μm. Le rapport f/f_0 est environ 0.8. A gauche de haut en bas : rayon et pression au cours du temps sur un cycle d'oscillation, et diagramme pression-volume de la bulle. A droite, zoom sur le point de compression maximale : la pression est en avance de phase sur le volume. Les deux courbes du bas représentent les profils de vitesse et de température dans la bulle a. au point de pression maximale b. au point de rayon minimal.

1.5.2.3 Adimensionalisation

Afin de transformer la condition aux limites mobile (1.56) en une condition aux limites fixe, on introduit la nouvelle variable d'espace

$$y = \frac{r}{R(t)} \tag{1.64}$$

Les équations sont ensuite adimensionalisées en posant

$$t = \omega t^* \qquad R = R_0 R^* \qquad T = T_0 T^* \tag{1.65}$$

$$p_g = p_{g0} p_g^* \qquad \lambda = \lambda_0 \lambda^* \qquad u_g = \omega R_0 u^* \tag{1.66}$$

où λ_0 est la conductivité thermique à la température T_0. Le système d'équation obtenu s'écrit, en notant g' les dérivées temporelles par rapport à t^*

$$\frac{p_g^*}{T^*}\left[\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{u_g^* - R^{*\prime} y}{R^*}\frac{\partial T^*}{\partial y}\right] = \frac{\gamma - 1}{\gamma} p_g^{*\prime} + \frac{\chi}{R^{*2}}\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y}\right) \tag{1.67}$$

$$u_g^* - y R^{*\prime} = \frac{\chi}{R^* p_g^*}\left[\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y} - y \left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=1}\right] \tag{1.68}$$

$$p_g^{*\prime} = \frac{3\gamma}{R^*}\left(\frac{\chi}{R^*}\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=1} - p_g^* R^{*\prime}\right) \tag{1.69}$$

et les conditions aux limites (1.56) et (1.57) deviennent respectivement

$$T^*(y = 1) = 1 \tag{1.70}$$

$$\left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \tag{1.71}$$

1.5.3 Oscillations linéaires

1.5.3.1 Linéarisation des équations thermiques

Pour des oscillations de faible amplitude, le rayon de la bulle, la pression et la température dans le gaz varient faiblement et de manière sinusoïdale autour de leur valeur d'équilibre et on note

$$R^* = 1 + \mathcal{X}(t) \quad = 1 + \frac{1}{2}\left(X e^{-it^*} + \text{c.c.}\right) \tag{1.72}$$

$$p_g^* = 1 + \mathcal{P}_g(t) \quad = 1 + \frac{1}{2}\left(P_g e^{-it^*} + \text{c.c.}\right) \tag{1.73}$$

$$T^* = 1 + \Theta(y, t) = 1 + \frac{1}{2}\left(\theta(y) e^{-it^*} + \text{c.c.}\right) \tag{1.74}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1, les équations (1.67)-(1.69) se réduisent à :

$$-i\theta = \frac{\gamma - 1}{\gamma} P_g + \frac{\chi}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \tag{1.75}$$

$$-iP_g = 3\gamma \left[\chi \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=1} - X \right] \tag{1.76}$$

avec les conditions aux limites

$$\theta(1) = 0 \qquad \left. \frac{d\theta}{dy} \right|_{y=0} = 0 \tag{1.77}$$

A cet ordre, l'équation (1.68) disparaît, et le profil de vitesse dans la bulle est linéaire. La résolution de l'équation (1.75) avec les conditions aux limites (1.77) fournit le profil de température dans la bulle

$$\theta(y) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \, P_g \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \delta y}{y \ \operatorname{sh} \delta} \right] \qquad \text{avec} \qquad \delta = \left(-\frac{i}{\chi} \right)^{1/2} \tag{1.78}$$

et en introduisant cette solution dans l'équation (1.76), on obtient la gain et la phase entre le rayon de la bulle et la pression dans le gaz par la relation

$$P_g = -\Phi \, X \qquad \text{avec} \qquad \Phi = \frac{3\gamma}{1 + 3(\gamma - 1)(\delta \coth \delta - 1)/\delta^2} \tag{1.79}$$

Il est intéressant de vérifier que lorsque χ tend vers l'infini (diffusivité très élevée), δ tend vers 0, et Φ tend vers 3. La relation (1.79) est alors la loi de comportement isotherme linéarisée. A l'inverse, lorsque χ tend vers 0 (diffusivité très faible), il apparaît que Φ tend vers 3γ et (1.79) est bien la forme linéarisée du comportement adiabatique du gaz.

1.5.3.2 Exposant polytropique. Viscosité ajoutée

Le développement ci-dessus montre que le comportement de la bulle est dans le cas général à mi-chemin entre isotherme et adiabatique. La notion d'exposant polytropique quantifie ce comportement et s'obtient aisément à partir de la relation pression-rayon (1.79), que nous écrivons en séparant parties réelle et imaginaire et en écrivant

$$P_g = -\operatorname{Re} \Phi \, X - \operatorname{Im} \Phi \, iX$$

ce qui donne la relation pression-rayon [11]

$$\mathcal{P}_g = -\operatorname{Re}\Phi\ \mathcal{X} + \operatorname{Im}\Phi\ \mathcal{X}' \tag{1.80}$$

La partie oscillante de p_g a donc une composante en phase avec le rayon, et une autre proportionnelle à sa dérivée. La partie en phase est la linéarisation de la relation

$$\frac{p_g}{p_{g0}}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{3\eta} = 1 \tag{1.81}$$

où

$$\eta = \frac{1}{3}\operatorname{Re}\Phi \tag{1.82}$$

est appelé coefficient polytropique. Il généralise la loi de comportement isotherme ou adiabatique en prenant en compte les effets diffusifs dans le gaz.

La composante de $\mathcal{P}_g$ proportionnelle à $\mathcal{X}'$ correspond à l'amortissement lié à la diffusion thermique mentionné plus haut. On remarquera d'ailleurs qu'en calculant $\oint -p_g\dot{V}_g$ à partir de (1.80), la composante proportionnelle à $\mathcal{X}$ donne une contribution nulle et la composante proportionnelle à $\mathcal{X}'$ donne une contribution strictement positive, correspondant à la production d'entropie sur le cycle.

Nous avons vu dans la section (1.3.2.5) que la viscosité du liquide revient à ajouter à la pression du gaz une composante proportionnelle à la vitesse radiale de la bulle (équation (1.21)), ce qui suggère une analogie entre les deux phénomènes d'amortissement thermique et visqueux. Pour formaliser ce concept, on peut linéariser l'équation de Keller en prenant en compte la viscosité du liquide et le comportement du gaz décrit par (1.80). Après calcul on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique amorti, établie dans la section 1.4.1

$$-\omega^2 X + 2ib\omega X + \omega_0^2 X = AP \tag{1.83}$$

avec cette fois

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\rho R_0^2}\left[p_{g0}\operatorname{Re}\Phi - \frac{2\sigma}{R_0}\right] \tag{1.84}$$

$$2b = \frac{4\mu}{\rho R_0^2} + \frac{\omega^2 R_0}{c} - \frac{p_{g0}}{\rho\omega R_0^2}\operatorname{Im}\Phi \tag{1.85}$$

11. Notons que le passage de cette équation à la suivante est possible seulement parce que X et P représentent des grandeurs sinusoïdales. Dans le cas général la relation entre $X(t)$ et $P(t)$ est beaucoup plus complexe et prend une forme intégrale (ce qui est prévisible, le phénomène étant de nature diffusive). En particulier la relation (1.80) est fausse pour le régime transitoire et n'est valable qu'aux temps longs. Ce point est discuté en détail dans Prosperetti (1991).

Nous voyons que la fréquence de résonance fait intervenir $\mathrm{Re}\,\Phi = 3\eta$ et l'exposant polytropique remplace donc le facteur Γ égal à 1 ou γ introduit précédemment. Le coefficient d'amortissement $2b$ contient un terme supplémentaire proportionnel à $-\mathrm{Im}\,\Phi(>0)$. On peut donc intégrer l'amortissement thermique à l'amortissement visqueux en définissant une viscosité ajoutée par

$$\mu_{th} = -\frac{p_{g0}}{4\omega}\,\mathrm{Im}\,\Phi \tag{1.86}$$

La figure 1.13 montre l'évolution du coefficient polytropique en fonction de la fréquence pour différentes railles de bulle. On retrouve le fait intuitif qu'une bulle se comporte de manière isotherme à basse fréquence et de manière adiabatique à haute fréquence. La figure 1.14 montre les variations des trois coefficients d'amortissement visqueux, thermique et acoustique ainsi que leur résultante en fonction de la fréquence pour des bulles de 10 μm et de 100 μm : à basse fréquence, l'amortissement est dominé par les effets thermiques, alors qu'à haute fréquence, l'amortissement lié au rayonnement acoustique prédomine. L'amortissement visqueux est négligeable pour une bulle de 100 μm, et inférieur d'un ordre de grandeur aux autres effets pour une bulle de 10 μm.

1.5.3.3 Discussion

Les notions d'exposant polytropique et de viscosité ajoutée résultent d'une étude linéaire. La question est : dans quelle mesure les effets thermiques peuvent-ils être représentés par ces deux grandeurs dans un cadre non-linéaire ? Une solution séduisante pour représenter les effets thermiques de manière simple dans une équation de bulle non-linéaire, par exemple l'équation de Keller, est d'utiliser le coefficient polytropique pour la relation pression-volume de la bulle, et de remplacer la viscosité normale du liquide μ par la viscosité augmentée $\mu + \mu_{th}$ pour traduire l'amortissement thermique.

Cette solution a été introduite initialement par Prosperetti (1974, 1975) pour l'étude analytique des résonances non-linéaires de l'équation de Rayleigh. La validité générale de cette démarche n'est pas évidente pour des oscillations non-linéaires car une grande partie de l'information présente dans les équations complètes (1.67)-(1.68) est perdue lors de la linéarisation. On peut déjà s'en rendre compte très simplement en remarquant que la viscosité thermique équivalente dépend de la fréquence, et que sa définition sous-entend un comportement mono-harmonique des oscillations. Or nous avons vu précédemment que les oscillations non-linéaires de la bulle font intervenir un spectre de fréquences très complexes, et ceci d'autant plus que la bulle est excitée au voisinage d'une résonance non-linéaire.

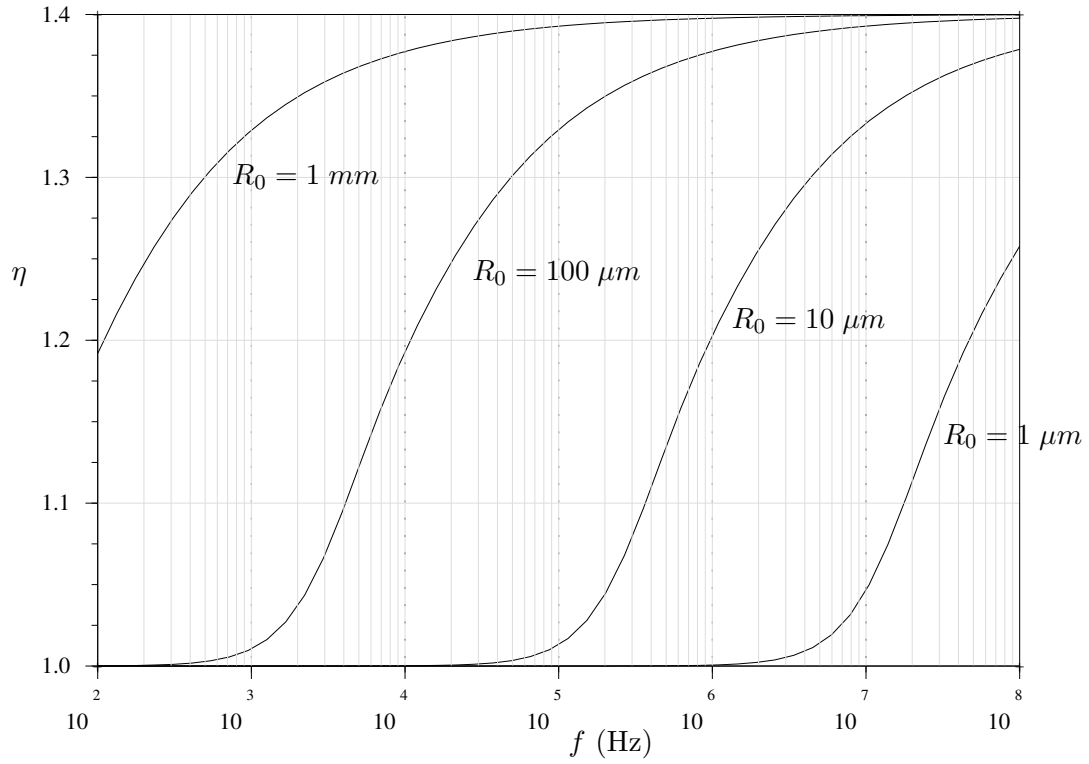


FIGURE 1.13 – Variation de l'exposant polytropique d'une bulle d'air de 1, 10, 100 μm, et 1 mm avec la fréquence acoustique.

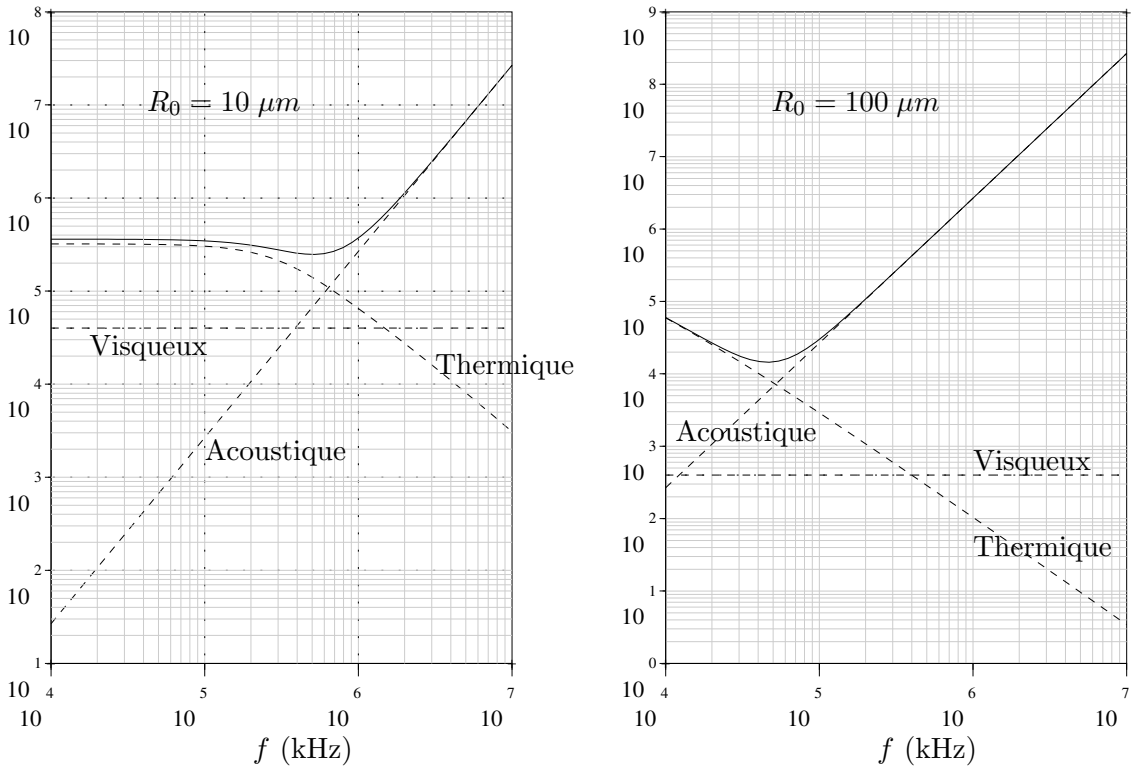


FIGURE 1.14 – Variation du coefficient d'amortissement en fonction de la fréquence pour une bulle d'air de 10 et 100 μm. Les trois courbes en pointillés représentent les trois contributions visqueuse, thermique et acoustique, et la courbe en traits pleins représente l'amortissement total.

Cette limitation a été mise en évidence expérimentalement par Crum (1983), qui a pu mesurer l'exposant polytropique de bulles plus petites que le rayon de résonance maintenues immobiles par les forces de Bjerknes (voir section 5.3.4), pour différentes fréquences d'excitation et pour différents gaz.

Une corrélation relativement bonne est obtenue avec la théorie linéaire sauf au voisinage de $f/f_0 = 1/2$, où la résonance 2/1 est excitée, ce qui rend l'approximation linéaire non valable.

Crum and Prosperetti (1983) ont tenté d'améliorer la corrélation entre les résultats expérimentaux de Crum (1983) et la théorie au voisinage de la résonance 2/1, en utilisant les solutions analytiques non-linéaires obtenues dans Prosperetti (1974), où les effets thermiques sont modélisés par un exposant polytropique et une viscosité augmentée.

Les auteurs obtiennent une bonne corrélation, mais montrent ensuite dans Crum and Prosperetti (1984) que leurs résultats étaient basés sur un calcul faux, sous-estimant la viscosité effective dans un rapport 4. Ils concluent définitivement que la description des effets thermiques par le couple de paramètre (η, μ_{th}) n'est valable que dans le cadre linéaire, ou bien pour des amplitudes modérées, loin de toute résonance.

Sur la base de ces considérations, Prosperetti et al. (1988) établissent le système d'équations présentés dans la section (1.5.2), et le résolvent numériquement en le couplant à l'équation de Keller. Les résultats montrent clairement que l'approximation polytropique ne reste valable que lorsque la bulle est excitée suffisamment loin d'une résonance. En revanche, pour des fréquences d'excitation proche des résonances d'ordre 1 (principale), 1/2 (sous-harmonique), ou 2 (harmonique), des différences notables sont constatées. Kamath and Prosperetti (1989), en utilisant une méthode numérique plus efficace (voir section 1.6.3) montrent que les diagrammes de bifurcation obtenus par l'approximation polytropique et par le modèle complets diffèrent nettement.

1.6 Simulation numérique

1.6.1 Changement de variables

L'équation de Rayleigh peut être exprimée sous forme adimensionnelle en posant

$$t^* = \omega t \qquad R = R_0 R^* \qquad U^* = \omega R_0 \dot{R} \tag{1.87}$$

$$p_g = p_{g0} p_g^* \qquad p_\infty = p_0(1 + p_\infty^*) \tag{1.88}$$

On obtient alors, en notant $'$ les dérivées par rapport à t^*

$$R^{*\prime} = U^* \tag{1.89}$$

$$U^{*\prime} = -\frac{3}{2}\frac{U^*}{R^*} + P\left[p_g^* - \frac{\Sigma}{R^*} - M\frac{U^*}{R^*} - (1-\Sigma)(1+p_\infty^*)\right] \tag{1.90}$$

avec

$$P = \frac{p_{g0}}{\rho R_0^2 \omega^2} \qquad \Sigma = \frac{2\sigma}{R_0 p_{g0}} \qquad M = \frac{4\mu\omega}{p_{g0}} \tag{1.91}$$

Dans la phase de contraction de la bulle, la vitesse radiale $\dot{R}$ peut être très élevée, et change de sens très rapidement lors du rebond. Pour limiter ces dynamiques très rapides et apporter un gain de temps calcul, Lauterborn and Parlitz (1988) ont proposé le changement de variable suivant

$$R^* = \frac{1}{B}\log\left(\frac{v}{A}\right) \qquad U^* = E\frac{w}{v} \qquad t^* = s/EB \tag{1.92}$$

A, B et E étant des constantes empiriques. Le système précédent s'exprime, par rapport aux nouvelles fonctions inconnues $v(s)$ et $w(s)$, sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{ds} &= w \\
\frac{dw}{ds} &= \left(1 - \frac{3}{2B}\frac{1}{R^*}\right)\frac{w^2}{v} - \frac{PM}{EB}\frac{w}{R^{*2}} \\
&\quad + \frac{P}{E^2 B}\left[p_g^* - \frac{\Sigma}{R^*} - (1-\Sigma)\,(1+p_\infty^*)\right]\frac{v}{R^*}
\end{aligned} \tag{1.93}$$

1.6.2 Résolution dans le cadre polytropique

Dans l'approximation polytropique, la pression dans le gaz s'écrit simplement $p_g^* = (R^*)^{3\eta}$, et la viscosité ajoutée est intégrée en prenant $M = M - \operatorname{Im}\Phi$.

Le système d'équations (1.93) est un système d'équations différentielles ordinaires.

Pour des excitations assez faibles, le système peut être résolu par une méthode classique du type Runge-Kutta ou Adams. Ce type de méthode échoue classiquement lorsque les dérivées prennent des valeurs importantes (le système est dit «raide» Gear (1971)), ce qui est le cas lorsque la bulle implose violemment. Une méthode inconditionnellement stable, de type Gear, doit alors être employée. L'inconvénient de ce type de méthode est qu'elle nécessite la donnée du Jacobien du système d'équations différentielles. Pour le problème de la bulle seule, ce Jacobien peut être écrit relativement aisément et permet une résolution de l'équation différentielle quelle que soit l'amplitude de l'excitation.

Enfin, nous avons pu constater que le changement de variable (1.92) suggéré par Lauterborn and Parlitz (1988) conduisait dans certains cas à un gain de temps calcul de l'ordre de 10.

1.6.3 Résolution exacte des effets thermiques

La pression dans la bulle ne s'écrit plus de façon simple en fonction du rayon mais doit être obtenue par la résolution directe des équations de conservation dans la bulle, par exemple le système (1.67)-(1.71).

Il s'agit alors d'un problème aux dérivées partielles, bien plus délicat à traiter numériquement et plus consommateur de temps calcul. Initialement ce système a été résolu par Prosperetti et al. (1988) en discrétisant les dérivées suivant la position y dans la bulle par différences finies. Cette méthode conduisant à des temps de calcul extrêmement longs, Kamath and Prosperetti (1989) ont développé une méthode spectrale que nous utiliserons par la suite et dont nous rappelons les grandes lignes.

Tout d'abord, dans le système (1.67)-(1.71) la température T est remplacée par la variable

$$\tau = \int_{T_\infty}^{T} \lambda(s) ds \tag{1.94}$$

qui permet de prendre en compte les variations de la conductivité thermique λ avec la température, en l'occurrence sous forme d'une corrélation linéaire $\lambda = AT + B$. Le système d'équations obtenu est détaillé en annexe B, et peut s'écrire symboliquement,

$$\frac{dp_g^*}{dt} = F\left(\left.\frac{\partial \tau^*}{\partial y}\right|_{y=1}, R^*, U^*\right) \tag{1.95}$$

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial t} = G\left(\frac{\partial \tau^*}{\partial y}, \frac{\partial^2 \tau^*}{\partial y^2}, R^*, U^*\right) \tag{1.96}$$

où τ^* est la variable τ adimensionalisée.

Les conditions aux limites associées s'écrivent :

$$\tau(y = 1) = 0 \tag{1.97}$$

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \tag{1.98}$$

La variable τ^* est alors projetée sur une base de N fonctions Φ_k sous la forme

$$\tau^*(y, t^*) = \sum_{k=1}^{N} a_k(t^*)\Phi_k(y) \tag{1.99}$$

Les fonctions de base doivent être choisies de telle sorte qu'elles vérifient individuellement les conditions aux limites correspondant à (1.70)-(1.71) On peut par exemple prendre les fonctions suivantes, construites à partir des polynômes de Chebyshev pairs :

$$\Phi_k(y) = T_{2k}(y) - T_0(y) = T_{2k}(y) - 1 \tag{1.100}$$

On projette ensuite l'équation (1.96) sur cette base de fonctions en calculant les produits scalaires successifs

$$\left(\left.\frac{\partial \tau^*}{\partial t}\right| \Phi_k\right) = \int_{-1}^{1} G(y)\Phi_k(y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \tag{1.101}$$

Ce faisant, on remplace une équation aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles dont les fonctions inconnues sont les coefficients $a_k(t^*)$. En couplant ce système avec l'équation de bulle (1.89)-(1.90) (ou une forme plus complexe comme l'équation de Keller) et l'équation (1.95), on

obtient un système du premier ordre sous la forme générique

$$\frac{d}{dt^*}\begin{bmatrix} R^* \\ U^* \\ p_g^* \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = F(R^*, U^*, p_g^*, a_1, a_2, \ldots, a_N; t^*) \tag{1.102}$$

Le gros avantage des méthodes spectrales sur une méthode de type différences finies réside dans le nombre d'équations différentielles à résoudre. Dans le cas présent, on a un système de $N + 3$ équations, alors qu'une formulation différences finies conduirait à $P + 3$ équations où P est le nombre de noeuds du maillage. Prosperetti et al. (1988) montrent qu'il faut environ $P = 400$ noeuds pour obtenir une bonne convergence de la méthode, alors que Kamath and Prosperetti (1989) indiquent que $N = 4$ fonctions de base suffisent dans la plupart des cas.

L'intérêt des polynômes de Chebychev est que le terme d'erreur décroit très rapidement avec N, ce qui permet de prendre un nombre de fonctions de base assez peu élevé Gottlieb and Orszag (1977). De plus l'erreur est indépendante du comportement de la fonction aux limites en $y = 0$ et $y = 1$, et on peut à priori garder un nombre de termes constant au cours de l'intégration, même lorsque les gradients sont importants en $y = 1$, ce qui est le cas lorsque le gaz se comporte de façon quasi-adiabatique.

1.7 Seuil de cavitation instable

1.7.1 Phase de croissance

Le séparation nette entre cavitation stable et instable a été justifiée au début de ce chapitre par le fait que la croissance explosive d'une bulle intervient soudainement au delà d'un certain seuil de dépression, appelé seuil de Blake, et de l'ordre de la pression hydrostatique.

Le seuil de Blake s'applique à des transformations quasi-statiques, et est donc valable si la pression acoustique varie lentement. Dans ces conditions, tant que l'équilibre de la bulle est stable la phase de croissance est contrôlée par la raideur du système, et l'énergie cinétique du liquide y est négligeable. Toute la puissance mécanique fournie au système est convertie en énergie potentielle de détente du gaz. De manière imagée, la pression acoustique agit sur la bulle comme le ferait une force exercée sur un ressort très dur. On conçoit bien alors que le seuil de Blake est applicable lorsque la fréquence acoustique est très inférieure à la fréquence propre de la bulle, ou si l'on préfère lorsque le rayon de la bulle est très inférieur au rayon de résonance.

Lorsque ce n'est plus le cas, l'énergie cinétique du liquide n'est plus négligeable pendant la phase de croissance, et le raisonnement basé sur une rupture d'équilibre statique conduisant au seuil de Blake n'est plus applicable. A l'extrême inverse où la fréquence est très supérieure à la fréquence de résonance, la croissance est contrôlée par les effets inertiels, et tout se passe comme si on appliquait une force sinusoïdale à un ressort très mou.

Dans ces conditions, une définition plus universelle de la cavitation instable doit être donnée. Les simulations numériques montrent que la notion de seuil reste correcte sauf pour des fréquences très élevées. Aussi, dans le cas général, la cavitation instable peut être définie qualitativement par le fait que le rayon de la bulle atteint plusieurs fois son rayon initial dans la phase de détente, et implose ensuite avec une vitesse finale très élevée.

Afin de montrer l'importance du rayon maximum atteint à la fin de la phase de détente, nous examinons rapidement dans la section suivante le mécanisme énergétique mis en jeu lors de l'implosion. Les sections suivantes discutent quelques critères quantitatifs proposés par différents auteurs

1.7.2 Etude de l'implosion

Rappelons que le théorème de l'énergie cinétique appliqué au liquide s'écrit (c'est en fait l'équation de Rayleigh, voir tableau 1.4)

$$\dot{K} = p_R \dot{V}_g - p_\infty \dot{V}_g \tag{1.103}$$

ou encore

$$K_2 - K_1 = \int_{V_{g_1}}^{V_{g2}} (p_R - p_\infty)\, dV_g \tag{1.104}$$

Or, l'implosion conduit la bulle entre deux états où son énergie cinétique est nulle, et peut donc être divisée en deux phases : la première où l'énergie

cinétique augmente jusqu'à sa valeur maximale, pour $p_R = p_\infty$, et la deuxième où cette énergie cinétique est convertie en énergie de compression de la bulle.

L'énergie cinétique maximale peut donc s'écrire

$$K_{max} = \int_{V_{max}}^{V_K} (p_R - p_\infty)\, dV_g \tag{1.105}$$

où V_{max} est le volume de la bulle atteint à la fin de la phase de croissance, et V_K est le volume de la bulle tel que $p_R(V_K) = p_\infty$. Plus la bulle est initialement détendue, plus l'énergie cinétique restituée sera grande, et plus l'énergie de compression de la bulle en fin d'implosion sera élevée.

La figure 1.15 montre que le rayon minimum peut être obtenu graphiquement en égalant les deux aires comprises entre les courbes $p_R(V_g)$ et p_∞ (supposé constant lors de l'implosion) de chaque coté de leur point de concours, et il apparaît clairement sur ce schéma que le rayon minimum atteint par la bulle est très sensible à la pression dans la bulle en fin de croissance.

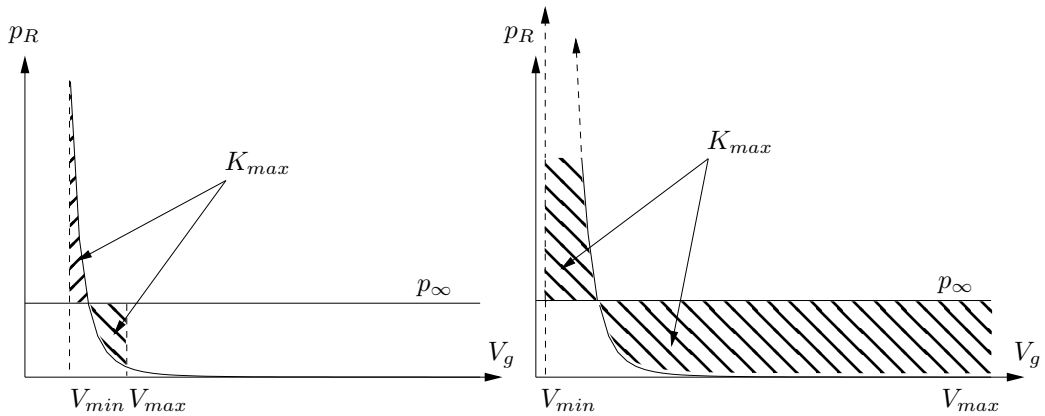


FIGURE 1.15 – Représentation graphique d'une implosion. La courbe en trait plein est représente p_R. Les aires hachurées correspondent à l'énergie cinétique maximale. A gauche cavitation stable : l'énergie cinétique maximale du liquide n'est pas trop élevée et sera aisément compensée par une compression faible de la bulle. A droite : cavitation instable. La pression dans la bulle était très faible au départ, et l'énergie cinétique du liquide est si élevée que la bulle devra atteindre un rayon quasi-nul pour arrêter le mouvement.

Selon Noltingk and Neppiras (1950), si la pression p_∞ peut être considérée a peu près constante pendant la phase d'implosion (voir figure 1.2), l'équation (1.104) peut être intégrée exactement pendant l'implosion. Diverses grandeurs comme la vitesse maximale, le rayon de la bulle en fin d'implosion peuvent être obtenues analytiquement, en fonction de V_{max}.

1.7.3 Rayon maximum

Parmi les nombreux critères pour définir la cavitation instable existant dans la littérature, l'argument suivant est récurrent : si une bulle double son rayon initial dans le cycle de détente, elle subit ensuite une implosion violente et peut être considérée comme transitoire.

Ce critère est sensiblement vérifié pour une bulle excitée au seuil de Blake, mais semble avoir une validité plus universelle. Dans Young (1989), Neppiras justifie intuitivement ce résultat en disant que les oscillations de la bulle sont symétriques par rapport à $R = R_0$ et que le rayon minimum est donc presque nul lorsque le rayon maximum est $2R_0$. Cet argument peut être cependant facilement mis en défaut car le même raisonnement pourrait être fait sur le volume de la bulle plutôt que sur son rayon, ce qui conduirait à un résultat différent d'un ordre de grandeur.

Flynn (1975a) montre que ce critère se justifie pour des bulles comprises entre $0,5\ \mu m$ et $50\ \mu m$, en étudiant numériquement les oscillations libres d'une bulle [12]

Son utilisation directe requiert évidemment la résolution numérique de l'équation de bulle, et est donc relativement limitée. Cela dit, certaines études basées sur des simulations numériques intensives de l'équation de bulle Church (1988) utilisent ce critère tel quel. Un balayage systématique de l'espace des paramètres (R_0, p_a) à fréquence fixe permet de tracer le seuil de cavitation transitoire, sans effectuer aucune hypothèse hormis la validité du critère $R_{max}/R_0 \geq 2$.

1.7.4 Seuil d'Apfel

Apfel (1981) a utilisé ce critère pour des bulles au-delà de la taille de résonance, où les effets inertiels gouvernent la phase de croissance. En décrivant cette dernière de manière approximative, l'auteur obtient une expression de R_{max}/R_0 en fonction des paramètres p_a et ω qu'il compare à $2R_0$. Sous forme implicite le seuil $p_a = p_T$ s'écrit

$$R_0 = \left(\frac{2}{3\omega}\right)(p_T - p_0)\left(\frac{2}{\rho p_T}\right)^{1/2}\left[1 + \frac{2}{3p_0}(p_T - p_0)\right] \tag{1.106}$$

12. à partir du modèle développé dans Flynn (1975b), incluant la compressibilité du liquide et les effets thermiques dans la bulle.

expression valable sous réserve que $R_0 < R_T$ avec

$$R_T = \frac{1}{4f}\left(\frac{p_T - p_0}{\rho}\right)^{1/2} \tag{1.107}$$

Notons que ce seuil a l'avantage de s'exprimer sous forme analytique, mais qu'il est à priori moins précis qu'une détermination par simulation numérique intensive en recherchant les points (R_0, p_a) pour lesquels $R_{max} = 2R_0$.

Remarquons enfin que ce seuil présente un intérêt limité dans la mesure où comme nous le verrons dans la section (5.3), les bulles de taille supérieure à la taille de résonance sont éjectées des zones de forte pression acoustique et interviennent assez peu dans le processus de cavitation instable.

Chapitre 2

Modèles de liquides à bulles

2.1 Introduction

Nous postulons dans cette étude que pour déterminer les caractéristiques de la propagation des ultrasons dans un liquide cavitant, ce dernier doit être considéré comme un milieu liquide à bulles.

En première approximation, la présence de bulles dans un liquide même à faible taux modifie notablement la compressibilité de l'ensemble, et on peut donc s'attendre à ce que la vitesse du son en soit modifiée. Négliger la présence de ces bulles, et représenter un tel milieu par les équations de Navier-Stokes est donc selon nous une erreur majeure, sauf si bien sûr les conditions sont telles que les bulles de cavitation n'arrivent pas à maturation. Nous reviendrons sur cette discussion au chapitre 5.

La description des liquides à bulles et plus généralement des milieux diphasiques requiert l'écriture d'équations macroscopiques du mélange prenant en compte de manière adéquate le comportement microscopique de l'écoulement autour des particules. Ces équations sont obtenues généralement par des méthodes de moyennage, dont nous rappellerons tout d'abord les différentes variantes.

Nous rappellerons ensuite les différents modèles de liquide à bulles disponibles dans la littérature en focalisant l'exposé sur le problème de la propagation d'une perturbation acoustique dans un milieu au repos.

Parmi l'ensemble de ces modèles, le modèle de Caflish et al. (1985) présente le double avantage d'être établi dans un contexte mathématique solide et de

s'écrire sous une forme simple. Ce modèle est non-linéaire, mais son utilisation dans le cadre linéaire fournit déjà un certain nombre de résultats importants, notamment sur le caractère dispersif des liquides à bulles. L'établissement d'ondes stationnaires linéaires dans une géométrie monodimensionnelle sera décrit précisément de manière analytique, et des résultats expérimentaux de la littérature viendront confirmer la pertinence de ce modèle dans le domaine des faibles amplitudes.

Les solutions analytiques du modèle de Caflish dans le cadre d'ondes faiblement non-linéaires sera ensuite examinée. Une approche physique de la non-linéarité et de son effet sur les formes d'ondes sera proposée, et confirmée par une réduction du modèle à une équation canonique d'ondes dispersives non-linéaires.

Enfin, pour mettre en évidence les limites du modèle, nous évoquerons plusieurs travaux théoriques fournissant une description plus poussée du phénomène de propagation d'une onde acoustique dans un liquide à bulles.

2.2 Modélisation des milieux diphasiques.

2.2.1 Généralités

La littérature sur la modélisation des milieux diphasiques est extrêmement abondante, et nous donnons ici un bref aperçu des différentes méthodes de moyennage existantes.

Nous définissons un milieu diphasique comme une phase dite «continue», par exemple un liquide, qui contient un grand nombre de particules, par exemple des bulles, des gouttes ou des particules solides, qui constituent la phase «dispersée».

L'homogénéisation d'un tel milieu consiste à définir des grandeurs macroscopiques moyennes, et à écrire des relations entre ces grandeurs décrivant son comportement d'ensemble. Ces relations doivent bien entendu traduire la présence des particules et leurs effets physiques sur le mouvement, mais la notion d'individu disparaît de la formulation. Pour prendre une analogie, un gaz est défini par sa température, son volume molaire et sa pression qui décrivent son comportement macroscopique ; l'équation d'état qui relie ces grandeurs est liée au mouvement des molécules du gaz, mais ne fait pas intervenir le mouvement d'un individu en particulier.

Quelle que soit la nature des particules, cette homogénéisation n'a un sens que si la phase dispersée inclut un grand nombre d'entités. Il est clair qu'une phase liquide contenant une ou deux bulles ne peut être traité comme un milieu homogène équivalent.

2.2.2 Notion de fermeture

Généralement, les méthodes de moyennage de milieux diphasiques consistent à appliquer séparément un opérateur de moyenne aux équations du mouvement dans les deux phases, et manipulent donc des grandeurs moyennées sur chaque phase Nigmatulin (1978); Drew (1983). Certaines méthodes Batchelor (1970) manipulent directement des grandeurs moyennes décrivant indistinctement la phase continue ou la phase dispersée.

Dans tous les cas, une étape supplémentaire doit compléter cette prise de moyenne : la fermeture du modèle. Elle traduit physiquement la manière dont les interactions entre les deux phases influent sur le comportement global du milieu, et représente donc essentiellement un couplage entre des phénomènes microscopiques et macroscopiques.

Sur le plan mathématique, l'étape de fermeture fournit une équation supplémentaire destinée à combler la perte d'information liée à la prise de moyenne des équations microscopiques. Une loi de fermeture particulièrement simple peut être obtenue pour des suspensions dites «diluées», pour lesquelles le taux volumique des particules est faible.

2.2.3 Moyennage volumique

Le moyennage volumique, qui apparaît comme le plus intuitif, consiste à envisager un volume, appelé «méso-volume», suffisamment petit devant les variations spatiales du mouvement d'ensemble, mais suffisamment grand pour contenir un grand nombre de particules (figure 2.1). Cette hypothèse est connue sous le nom de séparation des échelles.

Le point macroscopique $\mathbf{x}$ est alors défini par ce volume, et la prise de moyenne d'une grandeur g peut y être définie par

$$\langle g \rangle (\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_V g(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \tag{2.1}$$

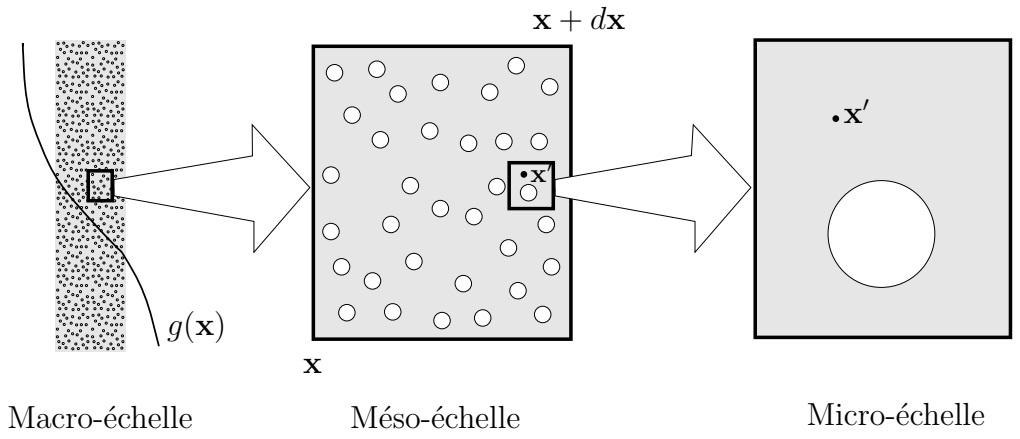


FIGURE 2.1 – Définition des différentes échelles intervenant dans le moyennage volumique. La macro-échelle est celle qui intéresse l'observateur et correspond aux variations des grandeurs moyennées. L'échelle microscopique correspond à la taille des particules. La méso-échelle doit être suffisamment grande pour contenir un grand nombre de particules, et suffisamment petite pour que du point de vue de l'observateur, les grandeurs macroscopiques y subissent une variation négligeable.

Le volume V peut représenter le volume occupé par une phase donnée dans le méso-volume, dans le cas d'un moyennage par phase, ou sur l'ensemble du méso-volume dans le cas d'un moyennage global.

Le moyennage volumique présente un certain nombre d'inconvénients : il nécessite en particulier la définition supplémentaire de moyennes surfaciques pour tous les termes évalués aux interfaces entre les deux phases Nigmatulin (1978). Notons également que la fermeture par passage à la limite diluée n'apparaît pas naturellement dans ce type de moyennage, contrairement au moyennage d'ensemble.

2.2.4 Moyennage d'ensemble

Le moyennage d'ensemble a été introduit initialement pour l'étude du comportement de suspensions solides en écoulement de Stokes Batchelor (1972). Il a été appliqué plus récemment avec succès tant dans le cadre des liquides à bulles que des suspensions solides.

Le moyennage statistique ou moyennage d'ensemble consiste à prendre des moyennes non plus sur un volume géométrique, mais sur l'ensemble des confi-

gurations possibles de M particules. Batchelor définit une configuration $\mathcal{C}_M$ par l'ensemble des positions $(\mathbf{r}_1, \dots \mathbf{r}_M)$ des centres de masse des M particules, supposées identiques, et une densité de probabilité $P(\mathcal{C}_M)$ telle que la probabilité pour qu'une particule ait son centre dans un volume $d\mathbf{r_1}$ autour du point $\mathbf{r}_1$, une autre dans un volume $d\mathbf{r_2}$ autour du point $\mathbf{r}_2$ etc..., est

$$dP = P(\mathcal{C}_M)\, d\mathcal{C}_M = P(\mathbf{r}_1, \dots \mathbf{r}_M)\, d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_M \tag{2.2}$$

Le fait que les particules soient identiques impose la condition de normalisation

$$\int P(\mathcal{C}_M)\, d\mathcal{C}_M = M! \tag{2.3}$$

où l'intégrale représente une intégration M fois sur le volume V contenant les M particules, par rapport aux variables $(\mathbf{r}_1, \dots \mathbf{r}_M)$.

Une grandeur physique définie en un point $\mathbf{x}$ quelconque du volume V peut alors être moyennée par

$$\langle g \rangle (\mathbf{x}) = \frac{1}{M!} \int g(\mathbf{x}|\mathcal{C}_M) P(\mathcal{C}_M)\, d\mathcal{C}_M \tag{2.4}$$

où $g(\mathbf{x}|\mathcal{C}_M)$ est la valeur que prend $g(\mathbf{x})$ lorsque les particules sont dans la configuration $\mathcal{C}_M$. Dans certaines configurations, $\mathbf{x}$ est dans la particule, dans les autres $\mathbf{x}$ est dans le liquide. g peut être par exemple la pression, la vitesse etc ...

L'expression de la moyenne (2.4) est inutilisable telle quelle, puisqu'elle nécessite de connaître l'écoulement pour une position donnée des M particules. Il convient donc, au prix de certaines approximations, de leur substituer des expressions faisant intervenir un nombre de particules plus restreint (en pratique une ou deux).

L'approximation effectuée est généralement la «limite diluée», applicable à des milieux où le taux volumique des particules est faible. Intuitivement, on voit bien que dans ce cas, un point du mélange a une faible probabilité d'avoir un grand nombre de particules dans son voisinage. Pour formaliser ce raisonnement, plusieurs approches plus ou moins rigoureuses ont été envisagées. Notons R_0 le rayon des particules, N le nombre de particules par unité de volume, et $\beta = 4/3\pi R_0^3 N$ le taux volumique des particules.

L'argument de Batchelor schématisé figure 2.2 consiste à décomposer les configurations $\mathcal{C}_M$ en plusieurs familles : celles où toutes les particules sont très éloignées du point $\mathbf{x}$ (figure 2.2.a), celles où une des particules est proche [1] de $\mathbf{x}$ (figure 2.2.b), celles où 2 particules sont proches de $\mathbf{x}$ (figure 2.2.c), etc...

1. par proche on entend à une distance de l'ordre de grandeur de R_0

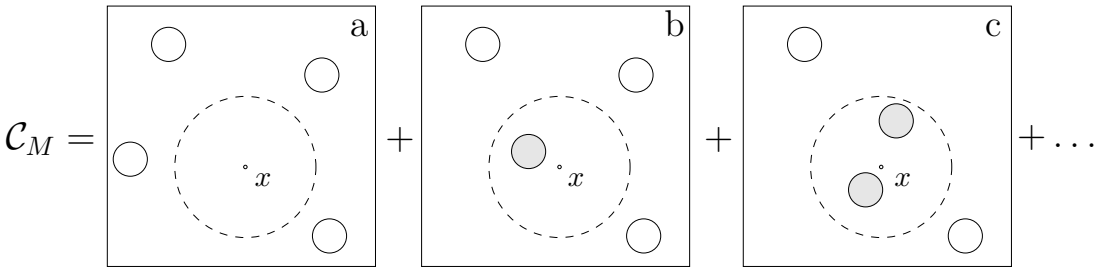


FIGURE 2.2 – Décomposition de l'ensemble des configurations $\mathcal{C}_M$ intervenant dans la moyenne (2.4) en sous-ensembles incluant 0, 1, 2 etc... particules au voisinage du point $\mathbf{x}$.

La probabilité des configurations (b) est de l'ordre de β, celle des configurations (c) d'ordre β^2, etc... et l'on sent intuitivement que cette série de configurations introduit des raffinements de plus en plus négligeables sur la valeur de la moyenne (2.4).

La seule prise en compte des configurations (a) revient à négliger totalement la présence des bulles dans le calcul de la moyenne, et représente le liquide seul ; la prise en compte supplémentaire des configurations (b) fait intervenir une particule seule en milieu infini et introduit une correction d'ordre β par rapport au liquide pur. La prise en compte des configurations (c) nécessite d'étudier l'écoulement autour de deux particules, et introduit des corrections d'ordre $O(\beta^2)$. On voit ainsi que l'on peut ramener l'écoulement autour de M particules à celui autour de une, deux particules selon le degré de précision recherché.

En utilisant cette méthode, Batchelor (1972) calcule la vitesse de chute des particules solides d'une suspension à l'ordre β, en ramenant le problème à l'écoulement autour de deux particules. Sur un schéma identique Van Wijngaarden (1976) calcule la vitesse acquise par les bulles dans un liquide soumis à une accélération d'ensemble, et en déduit la correction au coefficient de masse ajoutée à l'ordre β.

Une autre utilisation de ce moyennage est parfois utilisé en le combinant avec un moyennage volumique pour calculer une rhéologie moyenne d'un milieu diphasique. Ainsi, Batchelor and Green (1972) obtiennent une expression du tenseur des contraintes moyen à l'ordre $O(\beta^2)$ dans une suspension de particules solides. Biesheuvel and Van Wijngaarden (1984) calculent un tenseur des contraintes moyen dans un liquide à bulles et en déduisent une équation de conservation de la quantité de mouvement valable à l'ordre $O(\beta)$.

La méthodologie de Batchelor a été formalisée plus rigoureusement par Hinch (1977), qui applique sa méthode à divers problèmes de suspensions solides. Une application remarquable de cette méthode à l'étude de la propagation d'une onde acoustique linéaire a été effectuée récemment par Sangani (1991). Nous reviendrons sur cette étude ultérieurement.

Pour conclure sur les méthodes de moyennage, ajoutons qu'il est difficile de trancher quant à l'utilisation préférentielle d'un moyennage volumique ou d'ensemble. Il nous semble que le moyennage d'ensemble fournit un cadre théorique plus rigoureux pour le passage à la limite diluée, et plus généralement pour la fermeture du système à des ordres supérieurs en β.

2.3 Propagation d'ondes dans les liquides à bulles

Nous présentons dans cette section trois modèles simples de propagation d'une onde acoustique dans les liquides à bulles, sensiblement équivalents. Le dernier de ces modèles Caflish et al. (1985) est celui que nous retiendrons dans la suite de cette étude. Des arguments justifiant ce choix seront présentés dans la section suivante. Dans le cadre linéaire, les propriétés des ondes acoustiques peuvent être représentées par une relation de dispersion dont nous discutons le sens physique.

2.3.1 Méthode de Foldy

La première étude des propriétés acoustiques des liquides à bulles est assez ancienne Carstensen and Foldy (1947), et basée sur la théorie de la diffraction multiple développée par Foldy (1944). Il est intéressant de constater que les résultats de ces auteurs, bien que restreints au cadre linéaire, prédisaient l'essentiel des propriétés dispersives des liquides à bulles.

Le développement de Foldy n'est pas basé directement sur un moyennage des équations de la mécanique des fluides, mais sur les solutions de l'équation de propagation autour d'un obstacle sphérique. Considérons une bulle de rayon a en un point $\mathbf{r}_0$ dans un liquide compressible dans lequel se propage une onde acoustique plane, définie par le potentiel $\phi_a(\mathbf{x}) = Ae^{i\mathbf{k_l}.\mathbf{x}-i\omega t}$, où $k_l = |\mathbf{k_l}| = \omega/c_l$ est le nombre d'onde dans le liquide pur (figure 2.3)

On peut montrer facilement que le potentiel des vitesses en un point du liquide s'écrit sous la forme d'une onde incidente et d'une onde diffractée [2]

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x}) + g(R_0)\frac{e^{ik_l|\mathbf{x}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_0|}\phi_a(\mathbf{r}_0) \tag{2.5}$$

avec

$$g(R_0) = \frac{R_0\omega^2}{\omega_0^2(R_0) - \omega^2 - 2ib(R_0)\omega} \tag{2.6}$$

où les grandeurs ω_0^2 et b ont été définies au chapitre 1 ; le potentiel $\phi_a(\mathbf{r}_0)$ est le champ extérieur agissant sur la bulle, et peut-être défini comme le champ qui existerait au centre de la bulle si celle-ci était remplacée par du liquide. Dans le cas où l'onde est diffractée par un ensemble de N bulles placées en $\mathbf{r}_j, j = 1 \dots N$, le potentiel en un point du liquide est la somme du potentiel incident et du potentiel diffracté par chacune des bulles, soit

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N} g(R_{0_j}) \underbrace{\frac{e^{ik_l|\mathbf{x}-\mathbf{r}_j|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_j|}}_{G(\mathbf{x},\mathbf{r}_j)} \phi_j \tag{2.7}$$

où ϕ_j champ extérieur agissant sur la $j^{\text{ème}}$ bulle, est la somme de l'onde incidente ϕ_a en son centre $\mathbf{r}_j$, et de la résultante en $\mathbf{r}_j$ des ondes diffractées par les $N-1$ autres bulles, soit

$$\phi_j = \phi_a(\mathbf{r}_j) + \sum_{m\neq j} g(R_{0_m})\frac{e^{ik_l|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m|}}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m|}\phi_m, \quad j = 1 \dots N \tag{2.8}$$

2. Notons que la validité de ce résultat est restreinte d'une part au cadre linéaire dans lequel la bulle effectue de petites oscillations, et néglige d'autre part les termes multipolaires liés à la non symétrie sphérique de l'onde incidente. Le terme dipolaire correspond par exemple à une oscillation longitudinale de la bulle par rapport au liquide sur laquelle nous reviendrons ultérieurement.

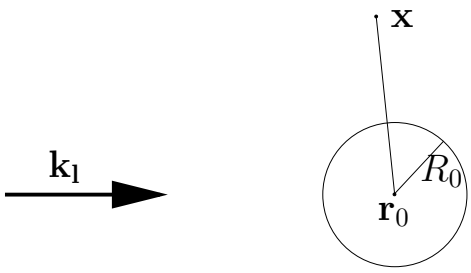


FIGURE 2.3 – Diffraction d'une onde plane par une bulle sphérique.

Notons que ϕ_j dépend des autres ϕ_m qui eux même dépendent de ϕ_j : la bulle j «s'auto-influence» car sa présence modifie le champ diffracté par les autres bulles. De plus, la validité de cette expression est restreinte au liquide, et serait fausse pour un point situé dans une bulle.

Il est en théorie possible de résoudre le système algébrique en $(\phi_1, \dots \phi_N)$ ci-dessus et de reporter la solution dans (2.7), le résultat étant bien sûr dépendant de la configuration des N bulles. La moyenne d'ensemble de l'expression obtenue fournirait alors le potentiel moyen. Afin d'éviter cette opération de toutes façons infaisable de manière pratique, Foldy applique directement une moyenne d'ensemble à (2.7) ; au prix de l'approximation selon laquelle une bulle n'influe pas sur le champ diffracté par les autres [3], une expression du champ moyen en un point $\mathbf{x}$ est obtenue :

$$\langle\phi\rangle(\mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x}) + g(R_0)\int G(\mathbf{x},\mathbf{r}_0)\langle\phi\rangle(\mathbf{r}_0)P(\mathbf{r}_0)d\mathbf{r}_0 \tag{2.9}$$

L'intégrale peut être reconnue comme la solution de l'équation de Helmholtz non homogène $(\nabla^2 + k_l^2)\phi(\mathbf{x}) = -4\pi g(R_0)\langle\phi\rangle(\mathbf{x})P(\mathbf{x})$, G étant la fonction de Green pour une onde divergente issue de $\mathbf{r}_0$ Morse and Feshbach (1953), et on peut donc écrire que $\langle\phi\rangle - \phi_a(\mathbf{x})$ vérifie cette équation

$$(\nabla^2 + k_l^2)\langle\phi\rangle(\mathbf{x}) - \underbrace{(\nabla^2 + k_l^2)\phi_a(\mathbf{x})}_{\substack{= 0 \text{ car } \phi_a \text{ représente} \\ \text{l'onde acoustique} \\ \text{incidente}}} = -4\pi g(R_0)\langle\phi\rangle(\mathbf{x})P(\mathbf{x}) \tag{2.10}$$

En écrivant que la probabilité $P(\mathbf{x})$ vaut $N(\mathbf{x})$ densité locale de bulles, on en déduit que $\langle\phi\rangle(\mathbf{x})$ est solution de l'équation

$$\nabla^2\langle\phi\rangle + k^2(\mathbf{x})\langle\phi\rangle = 0 \tag{2.11}$$

où le nombre d'onde k est donné par

$$k^2(\mathbf{x}) = k_l^2 + 4\pi g(R_0)N(\mathbf{x}) \tag{2.12}$$

ou encore

$$k^2(\mathbf{x}) = \frac{\omega^2}{c_l^2} + \frac{4\pi R_0\omega^2}{\omega_0^2(R_0) - \omega^2 - 2ib(R_0)\omega}N(\mathbf{x}) \tag{2.13}$$

On voit donc que la propagation dans le milieu est régie par un nombre d'onde équivalent, dépendant de la taille d'équilibre des bulles, de la fréquence, et de

3. Cette approximation consiste à négliger les images de la bulle j sur les autres bulles. Tout se passe comme si chaque bulle j était seule dans un liquide infini et diffractait un champ incident $\langle\phi\rangle$.

la densité locale des bulles. La dépendance de k par rapport à la fréquence traduit le caractère dispersif du milieu, et sa dépendance par rapport à $\mathbf{x}$ reflète d'éventuelles inhomogénéités dans la distribution spatiale des bulles.

Notons que le résultat obtenu par Foldy est un peu plus général car il tient compte de la polydispersité éventuelle des tailles de bulles. Ainsi si la suspension est définie par une fonction de distribution de tailles d'équilibre $N(R_0, \mathbf{x})$ où $N(R_0, \mathbf{x})dR_0$ est le nombre de bulles de taille d'équilibre comprise dans l'intervalle $[R_0, R_0 + dR_0]$ par unité de volume, la relation précédente se généralise en

$$k^2(\mathbf{x}) = \frac{\omega^2}{c_l^2} + 4\pi\omega^2 \int_0^\infty \frac{R_0}{\omega_0^2(R_0) - \omega^2 - 2ib(R_0)\omega} N(\mathbf{x}, R_0)\, dR_0 \qquad (2.14)$$

Les conséquences de cette relation de dispersion seront examinées dans la section 2.3.4.

En résumé, l'approche de Foldy décrit le champ en un point $\mathbf{x}$ du milieu comme la somme des ondes diffractées par les bulles avec deux approximations majeures
- chaque bulle «ressent» le champ moyen qui existerait en son centre si elle était absente.
- la probabilité pour que le point considéré appartienne à une bulle est nulle.

Nous allons voir maintenant que ce résultat peut être retrouvé à partir de modèles non-linéaires obtenus en moyennant directement les équations de la mécanique des fluides.

2.3.2 Modèle de Iordansky-Kogarko-van Wijngaarden

van Wijngaarden (1968), et deux autres chercheurs, Iordansky (1960) et Kogarko ont suggéré séparément le même modèle, basé sur un raisonnement heuristique plutôt que sur une méthode de moyennage rigoureuse. La démarche consiste à traiter directement le milieu diphasique comme un milieu homogène non visqueux et à écrire les équations de conservation. Ce modèle est couramment mentionné sous le nom IKvanW (voir Kedrinskii (1998) pour une revue des applications de ce modèle).

Les définitions des grandeurs macroscopiques qui vont suivre sous-entendent la séparation des échelles, c'est-à-dire qu'il existe un méso-volume contenant un grand nombre de bulles, mais sur lequel les grandeurs macroscopiques ont des variations infinitésimales. En ce sens, on peut définir le rayon des bulles comme un «continuum» $R(\mathbf{x}, t)$, cette dernière grandeur représentant

le rayon instantané des bulles du méso-volume définissant le point macroscopique $\mathbf{x}$.

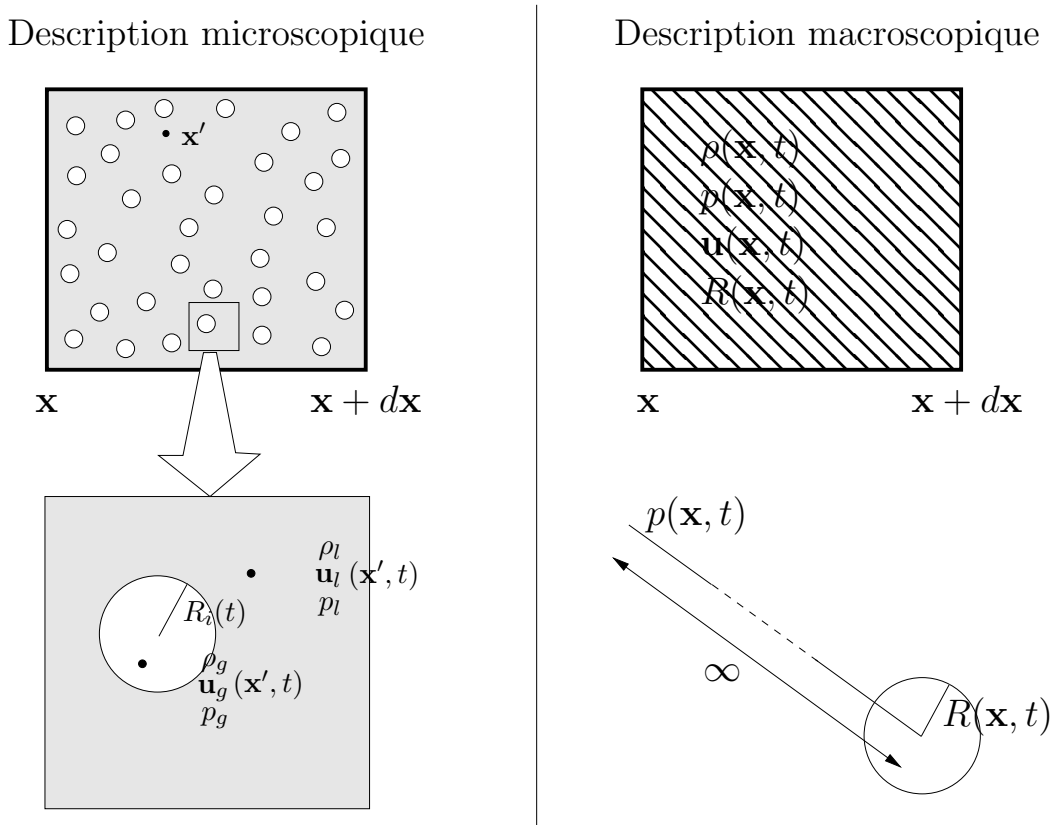


FIGURE 2.4 – Définition intuitive de grandeurs moyennes sur un méso-volume.

La densité moyenne est définie par

$$\rho = (1-\beta)\rho_l + \beta\rho_g \simeq (1-\beta)\rho_l \tag{2.15}$$

avec $\beta(\mathbf{x},t)$ taux volumique de gaz donné en fonction de la densité de bulles locale $N(\mathbf{x},t)$ par

$$\beta = N\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{2.16}$$

On écrit alors arbitrairement les équations de conservation sous la forme

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{u} = 0 \tag{2.17}$$

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right] = -\,\mathbf{grad}\,p \tag{2.18}$$

où p représente la pression moyenne dans le milieu et $\mathbf{u}$ la vitesse d'ensemble moyenne. Pour fermer le système, il conviendrait comme en mécanique des fluides homogènes d'écrire une relation d'état entre p et ρ, mais ici, cette dernière quantité dépend du taux volumique de gaz β, ainsi que de la masse volumique du liquide, qui peut être considéré comme incompressible. La relation cherchée est donc une relation entre p et β.

Elle peut être obtenue en supposant qu'il n'y aucun mouvement relatif entre le liquide et les bulles [4], et que celles-ci se déplacent à la vitesse $\mathbf{u}$. Dans ces conditions la masse de gaz contenue dans un volume V matériel de fluide donné est constante, ce qui s'écrit

$$M_g = \int_V \rho_g \beta dV = \int_V \frac{\rho_g \beta}{\rho} dm = C^{\text{te}} \tag{2.19}$$

et donc $\rho_g \beta / \rho = C^{\text{te}}$. En utilisant (2.15) et en supposant le liquide incompressible, cette relation conduit à

$$\frac{\rho_g \beta}{1-\beta} = \frac{\rho_{g0} \beta_0}{1-\beta_0} \tag{2.20}$$

Si l'on suppose alors que les bulles se comportent de manière isotherme :

$$\frac{p_g}{\rho_g} = \frac{p_{g0}}{\rho_{g0}} \tag{2.21}$$

La donnée de la masse de gaz constante dans les bulles fixe leur rayon d'équilibre R_0 ce qui donne par exemple une relation entre p_g et R

$$p_g = p_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right) \tag{2.22}$$

Il reste à relier les grandeurs p_g et p, et la fermeture du système s'effectue à proprement parler à ce niveau : p représente la pression moyenne dans le fluide, et si la solution est suffisamment diluée, elle représente essentiellement la pression dans le liquide. Si l'on considère une bulle particulière, celle-ci peut être considérée comme seule dans le fluide, et elle «voit» infiniment loin d'elle la pression moyenne p. On peut donc considérer que son mouvement est régi par l'équation de Rayleigh dans laquelle p_∞ est remplacée par p, soit [5]

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\rho_l} \left[p_g - p - \frac{2\sigma}{R} - 4\mu \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right] \tag{2.23}$$

4. Ce qui est nécessairement faux dans un champ de pesanteur, eu égard à la différence de densité entre les deux phases.

5. Les termes de tension superficielle et de viscosité n'étant pas inclus dans la dérivation originelle du modèle.

Les huit relations (2.15)-(2.23) déterminent les huit inconnues $\rho, \rho_g, \beta, N, R, \mathbf{u}, p, p_g$. Notons que la conservation de la masse de gaz peut être avantageusement remplacée par la loi de conservation de la densité de bulles

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} N\mathbf{u} = 0 \tag{2.24}$$

ce qui évite d'introduire la densité du gaz, qui comme nous l'avons vu dans le chapitre 1 n'est pas constante dans la bulle en présence de diffusion thermique. Cette relation doit dans ce cas être complétée par une relation entre p_g et R, donnée par le système d'équations (1.59)-(1.61). Cette modification du modèle de IKvanW a été utilisée par Prosperetti (1991).

Ce modèle entièrement basé sur des considérations heuristiques a pour idée directrice que la présence des bulles, même à faible taux, modifie la compressibilité du milieu et donc la vitesse du son. Mais l'écriture de l'équation de Rayleigh introduit de plus le fait que l'état de compression du milieu n'est pas forcément en phase avec la densité, comme c'est le cas pour l'acoustique linéaire d'un milieu homogène. Cela est dû à l'énergie cinétique emmagasinée par le liquide au cours des oscillations radiales des bulles.

Cette propriété implique que la réponse du milieu est différente selon la fréquence considérée, en d'autres termes le milieu est dispersif. L'aspect mathématique de ce caractère dispersif a déjà été mis en évidence par la théorie de Foldy, ou nous avons obtenu un nombre d'onde dépendant de la fréquence autrement que par une relation linéaire. La linéarisation du modèle de IKvanW fournit une relation similaire, en l'occurrence

$$k^2 = \frac{3\beta_0(1-\beta_0)\omega^2}{R_0^2(\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega)} \tag{2.25}$$

Cette relation est semblable à celle de Foldy, hormis l'absence du terme en $1/c_l$, justifiée par l'hypothèse incompressible pour le liquide effectuée ici, et par le facteur supplémentaire en $(1-\beta_0)$ au numérateur.

Rappelons que dans cette approche, comme dans celle de Foldy, la vitesse relative entre les bulles et le liquide est négligée sans aucune justification théorique.

2.3.3 Modèle de Caflish

2.3.3.1 Hypothèses et équations

Le modèle de Caflish et al. (1985) que nous utiliserons par la suite, est en fait une justification rigoureuse du modèle de IKvanW, duquel il diffère malgré tout légèrement. Son obtention est basée sur une méthode des échelles multiples et homogénéise les équations microscopiques dans la limite ou le nombre de bulles tend vers l'infini, et le rayon des bulles tend vers 0. Plus précisément, en définissant les paramètres adimensionnels δ et ϵ correspondants au rayon et à la distance moyenne inter-bulles rapportés à la longueur d'onde.

$$\delta = \frac{R_0}{\lambda} \qquad \epsilon = \frac{1}{N^{1/3}\lambda} \tag{2.26}$$

L'hypothèse de rapports d'échelle de Caflish et al. (1985) est

$$\delta = O(\epsilon^3) \tag{2.27}$$

ce qui impose que le taux de gaz soit en $\beta = O(\delta^2)$, donc très faible. Cette limite permet de justifier l'hypothèse, postulée à priori par van Wijngaarden, que la pression «ressentie par les bulles» est la pression moyenne, car dans la mesure où le rayon tend vers 0, l'entourage immédiat de la bulle est un volume infiniment petit. De plus le fait que la distance entre les bulles est très grande devant le rayon justifie intuitivement que l'interaction entre les bulles est négligée.

Le modèle s'écrit

$$\frac{1}{\rho_l c_l^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\partial \beta}{\partial t} \tag{2.28}$$

$$\rho_l \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{grad}\, p = 0 \tag{2.29}$$

$$\beta = \frac{4}{3}\pi N R^3 \tag{2.30}$$

$$R\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{\rho_l}\left[p_g - p - \frac{2\sigma}{R} - 4\mu\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right] \tag{2.31}$$

$$p_g = p_{g_0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\eta} \tag{2.32}$$

Remarquons que les premiers membres des deux premières équations, qui correspondent respectivement à la conservation de la masse et de la quantité

de mouvement, sont linéaires et correspondent aux équations de l'acoustique linéaire. Cela dit, l'écriture de l'équation de Rayleigh qui introduit un couplage entre la pression p et le rayon R, rend le modèle non-linéaire.

2.3.3.2 Interprétation physique

Un point du calcul de Caflish est fondamental : le rapport $\mathbf{u}/c$ de la vitesse moyenne et de la vitesse du son équivalente est de l'ordre de $O(\beta)$. Watanabe and Prosperetti (1994) ont donné une interprétation physique très claire de cette hypothèse : considérons un piston mobile dans un tube de section S rempli d'un liquide à bulles (figure 2.5) auquel on communique une vitesse u.

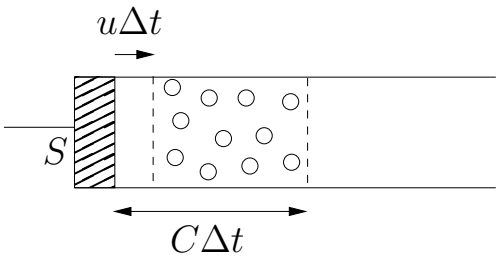


FIGURE 2.5 – Cas d'étude pour montrer que la vitesse est d'ordre β.

Le volume déplacé par le piston pendant Δt est $Su\Delta t$, et si le liquide est supposé incompressible ce mouvement engendre une variation de volume des bulles d'ordre $MR^2\Delta R$, où M est le nombres de bulles concernées et ΔR leur variation de rayon. La vitesse de propagation c de la perturbation étant finie, les bulles impliquées dans le mouvement sont celles qui sont à une distance $\simeq c\Delta t$ de la source, et leur nombre est donc $M = NSc\Delta t$. On a donc

$$Su\Delta t \simeq NSc\Delta t R^2 \Delta R \tag{2.33}$$

et comme $\beta \simeq NR^3$, on en déduit

$$\frac{u}{c} \simeq \beta \frac{\Delta R}{R} \tag{2.34}$$

Autrement dit, les bulles peuvent entreprendre de grandes oscillations et la vitesse moyenne du fluide rester faible. C'est pourquoi tous les termes en u^2 ou en βu peuvent être négligés pour obtenir un modèle valable à $O(\beta)$, et dans ces conditions les équations de IKvanW, en ajoutant la faible compressibilité

du liquide, sont équivalentes à celles de Caflish. C'est pour cette raison que les premiers membres des équations (2.28) et (2.29) sont linéaires.

Remarquons que comme pour le modèle de IKvanW, la vitesse relative entre les deux phases n'intervient pas dans la formulation. Ceci est une conséquence du fait que $\mathbf{u} = O(\beta)$: en remarquant en effet que la vitesse relative $\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g$ doit être physiquement de l'ordre de grandeur de la vitesse d'ensemble, nous voyons que sa prise en compte implique une correction en $O(\beta^2)$ sur l'expression $\mathbf{u} = (1-\beta)\mathbf{u}_l + \beta\mathbf{u}_g$, et une telle correction doit être négligée dans un modèle à l'ordre $O(\beta)$. Nous reviendrons sur ce point dans la section 2.6.2.

Remarquons enfin que les dérivées temporelles dans l'équation de Rayleigh devraient être théoriquement des dérivées dans le référentiel lié à la bulle, mais sont égales aux dérivées partielles écrites ci-dessus à des termes d'ordre $\mathbf{u}$ près.

2.3.3.3 Interprétation énergétique

Rappelons tout d'abord comment s'interprètent les équations de l'acoustique linéaire dans le liquide seul (obtenues en annulant le terme en β_t dans (2.28)) en termes énergétiques. On montre facilement l'équation de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\rho_l u^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_l c_l^2}\right)}_{\mathcal{E}} + \operatorname{div}\underbrace{p\mathbf{u}}_{\mathcal{I}} = 0 \tag{2.35}$$

$\mathcal{E}$ est une densité volumique d'énergie mécanique, le premier terme représentant l'énergie cinétique du liquide et le second son énergie potentielle de compression. $\mathcal{I} = p\mathbf{u}$ est un flux d'énergie (mesuré en W/cm^2) appelé intensité acoustique.

Cette équation de conservation résulte du théorème de l'énergie cinétique et exprime simplement que la variation d'énergie mécanique d'un volume de fluide V est égale à l'énergie acoustique entrant dans le volume pendant le même temps [6].

Si l'on considère maintenant les deux premières équations de Caflish (2.28)-

6. Notons que les équations de l'acoustique linéaire négligent les termes convectifs, et qu'en conséquence l'énergie cinétique apportée au volume V par convection est nulle. Les dérivées particulaires et convectives sont égales dans cette approximation.

(2.29), on vérifie aisément que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_l u^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_l c_l^2}\right) + \operatorname{div} p\mathbf{u} = p\frac{\partial \beta}{\partial t} = Np\dot{V}_g \tag{2.36}$$

soit, écrite sous forme intégrale sur un volume V de mélange liquide-bulle :

$$-\iint_A p\mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS = \iiint_V \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\, dV - \iiint_V Np\dot{V}_g\, dV \tag{2.37}$$

Le premier membre représente la puissance mécanique apportée au volume V par l'onde acoustique et le premier terme du membre de droite est la variation d'énergie mécanique du liquide.

Rappelons de plus que $-p\dot{V}_g$ représente la puissance mécanique fournie au système bulle seule excitée par une pression à l'infini p + liquide environnant (chapitre 1). Par conséquent le dernier terme de (2.37) est la puissance mécanique mise en jeu par les oscillations radiales de l'ensemble des bulles du volume V. La relation (2.37) indique donc comment l'énergie transportée par l'onde acoustique se partage entre le liquide et les bulles.

De plus, d'après le résultat (1.24) du chapitre 1, la puissance mécanique fournie à une bulle s'écrit :

$$P_{mec} = -p\dot{V}_g = \dot{K}_l - p_g\dot{V}_g + \sigma\dot{A}_g + 16\pi\mu R\dot{R}^2$$

Nous pouvons donc réécrire l'équation (2.36) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_l u^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_l c_l^2} + NK_l + N\sigma A_g\right) + \operatorname{div} p\mathbf{u} = -16N\pi\mu R\dot{R}^2 + Np_g\dot{V}_g \tag{2.38}$$

cette écriture étant choisie de manière à laisser dans le membre de droite les termes liés à la dissipation. Ce point apparaît clairement si l'on moyenne cette relation sur une période d'oscillation, et que l'on suppose le régime périodique, le terme en $\frac{\partial}{\partial t}$ disparaît et l'on obtient :

$$\langle \operatorname{div} p\mathbf{u}\rangle = \underbrace{\left\langle 16N\pi\mu R\dot{R}^2\right\rangle - \langle Np_g dV_g\rangle}_{q(\mathbf{x})} \tag{2.39}$$

la moyenne sur une période étant définie par :

$$\langle g\rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} g(\mathbf{x}, t)dt \tag{2.40}$$

Le second membre de la relation (2.39) représente la puissance volumique moyenne $q(\mathbf{x})$ dissipée par les bulles en un point $\mathbf{x}$ du milieu, de telle sorte que la puissance mécanique moyenne fournie à un volume V s'écrit :

$$\iint_A \langle -p\mathbf{u} \rangle \; dA = \iiint_V q(\mathbf{x}) \; dV$$

Le premier terme de $q(\mathbf{x})$, lié à la viscosité du liquide est toujours positif et correspond bien à une dissipation d'énergie.

Le second terme dépend de la manière dont on modélise les effets thermiques dans les bulles : si on utilise un modèle polytropique, l'intégrale de $-p_g dV_g$ sur un cycle est nulle, et la perte d'énergie liée aux effets thermiques est prise en compte dans le premier terme, où μ représente la viscosité du liquide augmentée de la viscosité thermique équivalente.

Par contre, si nous utilisons un modèle thermique rigoureux, l'intégrale de $-p_g dV_g$ sur un cycle est comme nous l'avons vu strictement positive (car le cycle de la bulle est forcément récepteur).

Cette puissance volumique moyenne dissipée en chaleur s'écrit donc :

$$q(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} 16N\pi(\mu+\mu_{th})R\dot{R}^2 \; dt & \text{modèle polytropique} \\ \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} 16N\pi\mu R\dot{R}^2 \; dt - \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} Np_g dV_g & \text{modèle thermique complet} \end{cases} \tag{2.41}$$

Notons que cette puissance calorifique doit être considérée comme une grandeur macroscopique, au même titre que p et u, et dépend de $\mathbf{x}$. Si l'on s'intéressait à l'échauffement du milieu tel qu'il pourrait être mesuré par l'expérimentateur, on pourrait écrire une équation de diffusion macroscopique dans laquelle cette quantité de chaleur intervient comme un terme source [7] :

$$\rho_l C_l \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_l \nabla^2 T + q(\mathbf{x}) \tag{2.42}$$

où le temps t représente un temps grand devant le nombre de périodes, et f est la fréquence d'oscillation. La résolution de cette équation associée aux conditions aux limites sur les parois du récipient permet d'obtenir l'évolution de la carte des températures dans le milieu.

7. En supposant que la conductivité thermique et la capacité calorifique du milieu liquide-bulles sont approximativement celles du liquide

Plus simplement, la puissance calorifique $q(x)$ *locale* est la grandeur à laquelle on accéderait avec une sonde calorimétrique plongée dans le milieu **?**. En effet, pour des temps suffisamment courts pour que les effets de diffusion soient négligeables ($t \ll \mathcal{L}^2/D$ ou $\mathcal{L}$ est une dimension caractéristique du récipient), si $T_s(t)$ est la température mesurée par la sonde au cours du temps, la pente de la courbe $T_s(t)$ à l'origine fournit

$$q(\mathbf{x}) = \rho C \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=0} \tag{2.43}$$

Nous utiliserons ces résultats au chapitre suivant pour mettre en évidence les effets non-linéaires sur la répartition spatiale de la puissance calorifique.

2.3.3.4 Extensions du modèle

La dérivation initiale effectuée par Caflish n'inclut pas le terme de tension superficielle ni le terme visqueux. Mais, comme le notent les auteurs, à l'ordre d'approximation envisagé, le problème est ramené à l'étude d'une bulle seule dans le liquide, les interactions entre bulles étant négligées. Ces effets modifiant seulement la condition à l'interface liquide-bulle peuvent donc être ajoutés a posteriori dans l'équation de Rayleigh. Pour la même raison les effets thermiques peuvent être décrits plus précisément que par la relation polytropique (2.32), en utilisant les équations présentées dans la section 1.5.

Par ailleurs, il est tentant de remplacer l'équation de Rayleigh par une équation de dynamique de bulle compressible par exemple l'équation de Keller. Contrairement aux extensions précédentes, celle-ci est plus délicate car dans le calcul de Caflish, le liquide est supposé explicitement incompressible à l'échelle microscopique. Commander and Prosperetti (1989) utilisent malgré tout cette extension sans démonstration, et le développement de Sangani (1991), basé sur le moyennage des équations de l'acoustique linéaire dans les deux phases montre que cette approximation est valable dans le cadre linéaire à $O(\beta)$.

Enfin le modèle a été dérivé sous l'hypothèse que toutes les bulles ont même rayon d'équilibre, autrement dit qu'elles contiennent toutes la même quantité de gaz. Cette hypothèse est très restrictive, premièrement dans une perspective de comparaison avec des résultats expérimentaux, où il est difficile d'engendrer pratiquement une distribution de bulles monodisperse. De plus, comme nous le verrons au chapitre 5, dans une expérience de cavitation acoustique, la population de bulles est variable dans le temps et dans l'es-

pace et évolue de manière complexe sous l'influence de plusieurs phénomènes physiques.

La dérivation initiale de Foldy contenait déjà cette extension à une population polydisperse et non-uniforme, mais dans un cadre linéaire. L'extension du modèle de Caflish à la polydispersité de la population de bulles peut être envisagé, en prenant comme définition pour β dans l'équation (2.28) :

$$\beta(\mathbf{x}, t) = \int_0^{+\infty} \frac{4}{3}\pi R^3(\mathbf{x}, t; R_0) N(R_0) dR_0 \tag{2.44}$$

où $N(R_0)$ est la fonction de distribution de taille des bulles, et $R(\mathbf{x}, t; R_0)$ est le rayon instantané d'une bulle de rayon d'équilibre R_0 placée en $\mathbf{x}$. Dans cette définition la distribution des bulles est la même dans tout l'espace. Notons alors qu'il faut résoudre l'équation de Rayleigh pour chaque rayon d'équilibre R_0 et que les équations (2.31)-(2.32) représentent en fait une infinité d'équations. Cette dernière remarque rend cette généralisation inutilisable dans un cadre non-linéaire mais est aisément manipulable dans la limite linéaire.

Anticipons légèrement sur le chapitre 5 en remarquant que comme β intervient dans une dérivée temporelle dans l'équation (2.28), cette dernière reste valable si l'on considère que N dépend aussi de $\mathbf{x}$:

$$\beta(\mathbf{x}, t) = \int_0^{+\infty} \frac{4}{3}\pi R^3(\mathbf{x}, t; R_0) N(\mathbf{x}, R_0) dR_0 \tag{2.45}$$

Ceci permet de prendre en compte des disparités spatiales de la population de bulle, dont nous ferons un usage intensif ultérieurement [8]. Ces extensions sont dues à Commander and Prosperetti (1989).

2.3.4 Relation de dispersion linéaire

Nous nous intéressons ici à la forme que prennent les équations de Caflish dans l'hypothèse linéaire, où toutes les grandeurs p, u et R oscillent avec des amplitudes faibles autour de leur valeur d'équilibre, à la même fréquence ω.

8. Cette dernière extension est quand même limitée par les hypothèses de base du modèle, et les variations spatiales de n doivent être nulles à l'échelle microscopique. Cette hypothèse est connue dans le cadre du moyennage d'ensemble comme hypothèse d'uniformité locale et interdit des configurations où la densité de bulles varierait significativement sur une longueur de l'ordre de la taille des bulles.

On posera donc

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x},t) &= p_0 + P(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \\ R(\mathbf{x},t) &= R_0\left[1 + (X(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \text{c.c.})\right] \\ \mathbf{u}(x,t) &= \mathbf{U}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{2.46}$$

Dans ces conditions, avec l'extension définie par (2.45) rendant compte de la non-uniformité spatiale et de la polydispersité de la population de bulles, les équations de Caflish se ramènent à une équation de Helmholtz, vérifiée indifféremment par les trois amplitudes complexes P, X ou $\mathbf{U}$:

$$\nabla^2 P + k^2(\mathbf{x})P = 0 \tag{2.47}$$

où le nombre d'onde $k(\mathbf{x})$ est fourni par la relation de dispersion

$$k^2(\mathbf{x}) = \frac{\omega^2}{c_l^2} + 4\pi\omega^2 \int_0^{+\infty} \frac{R_0}{\omega_0^2(R_0) - \omega^2 - 2ib(R_0)\omega} N(R_0,\mathbf{x})\, dR_0 \tag{2.48}$$

où ω_0 et b sont donnés par les expressions (1.84)-(1.85) du chapitre 1. Ce résultat est identique à celui obtenu par Foldy (1944).

Dans le cas où la population de bulles est monodisperse et uniforme dans l'espace, la relation de dispersion linéaire s'écrit simplement (par commodité d'écriture nous omettrons désormais d'écrire la dépendance de ω_0 et b en fonction de R_0).

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2} + \frac{3\beta_0\omega^2}{R_0^2(\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega)} \tag{2.49}$$

semblable à l'expression (2.25) obtenue par van Wijngaarden aux restrictions déjà mentionnées près.

En divisant les deux termes par ω^2, on obtient la vitesse du son effective dans le milieu, qui dépend de ω, ce qui traduit le caractère dispersif du milieu :

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_l^2} + \frac{3\beta_0}{R_0^2(\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega)} \tag{2.50}$$

Remarquons tout d'abord que, à cause des différentes causes d'amortissement du mouvement radial de la bulle (terme ib), k^2 est une grandeur complexe, donc k et c aussi. Pour interpréter physiquement cette caractéristique, envisageons une onde plane progressive de fréquence ω, et séparons les parties réelle et imaginaire de k :

$$p(x,t) - p_0 = A\exp(ikx - i\omega t) \quad = A\exp(ik_r x - i\omega t)\exp(-k_i x) \tag{2.51}$$

Si nous supposons de plus que l'onde se propage dans le sens des x croissants, k_r est positif, et la vitesse de phase de l'onde est donnée par ω/k_r. Le facteur $\exp -k_i x$ représente un amortissement spatial de l'onde, sous réserve que $k_i > 0$; dans le cas contraire l'onde s'amplifierait au fur et à mesure de sa propagation, ce qui n'est pas physique.

Un nombre d'onde k complexe représente donc une onde amortie spatialement au fur et à mesure de sa propagation, à condition que $\mathrm{Re}\, k . \mathrm{Im}\, k > 0$, ou encore $\mathrm{Im}\, k^2 > 0$, ce qui est bien le cas pour le nombre d'onde défini par (2.49).

Les figures 2.6.a et b montrent les évolutions respectives de la vitesse de phase et de l'amortissement en fonction de la fréquence pour des bulles d'air de 100 μm dans l'eau avec différents taux de gaz.

On voit sur ces figures que pour des fréquences inférieures à la fréquence de résonance, la vitesse de phase est inférieure à la vitesse du son dans le liquide pur, et ce d'autant plus que le taux de gaz est élevé (dans un rapport 15 pour $\beta_0 = 10^{-3}$). Cela correspond à l'approche intuitive selon laquelle la présence des bulles augmente notablement la compressibilité du milieu. Dans cette zone l'atténuation spatiale est liée aux facteurs d'amortissement du mouvement des bulles, les effets dominants sous la fréquence de résonance étant comme nous l'avons vu au chapitre 1 les effets thermiques.

Légèrement au-dessus de la fréquence de résonance, vitesse de phase et atténuation augmentent brusquement et conservent cette valeur élevée sur un intervalle d'autant plus large que le taux de gaz est grand. L'examen de la relation de dispersion montre que dans cette zone, le second terme dans l'expression de k^2 est très élevé en valeurs négatives. Par conséquent, k possède une partie imaginaire élevée, d'où l'atténuation observée. Physiquement, celle-ci n'est plus liée aux amortissement du mouvement de la bulle, mais au fait qu'au delà de la résonance, la bulle se contracte dans les phases de dépression : la compressibilité apparente du milieu est dans ces conditions négative, et il en est de même pour le carré de la vitesse du son. Remarquons d'ailleurs que même si le terme b est négligé dans la relation de dispersion, k^2 est négatif lorsque la fréquence ω est dans l'intervalle

$$\omega_0^2 \leq \omega^2 \leq \omega_0^2 + \frac{3\beta_0 c_l^2}{R_0^2} \tag{2.52}$$

cet intervalle de fréquence correspondant approximativement aux «bosses» observables sur la vitesse de phase et l'atténuation figure 2.6.

Enfin, au delà de la limite supérieure de (2.52), le terme en $1/c_l^2$ redevient

prépondérant dans la relation de dispersion. Physiquement, l'amplitude des oscillations des bulles est de plus en plus faible quand ω augmente, et la compressibilité du liquide pur contribue de plus en plus à la compressibilité globale du milieu.

2.4 Ondes stationnaires linéaires dans les liquides à bulles

Afin d'examiner les conséquences de la relation de dispersion linéaire présentée ci-dessus, nous nous intéressons à un problème de propagation dans une géométrie dimensionnelle schématisé par la figure 2.7 : on considère un tube rempli de liquide contenant des bulles de même rayon R_0 uniformément réparties.

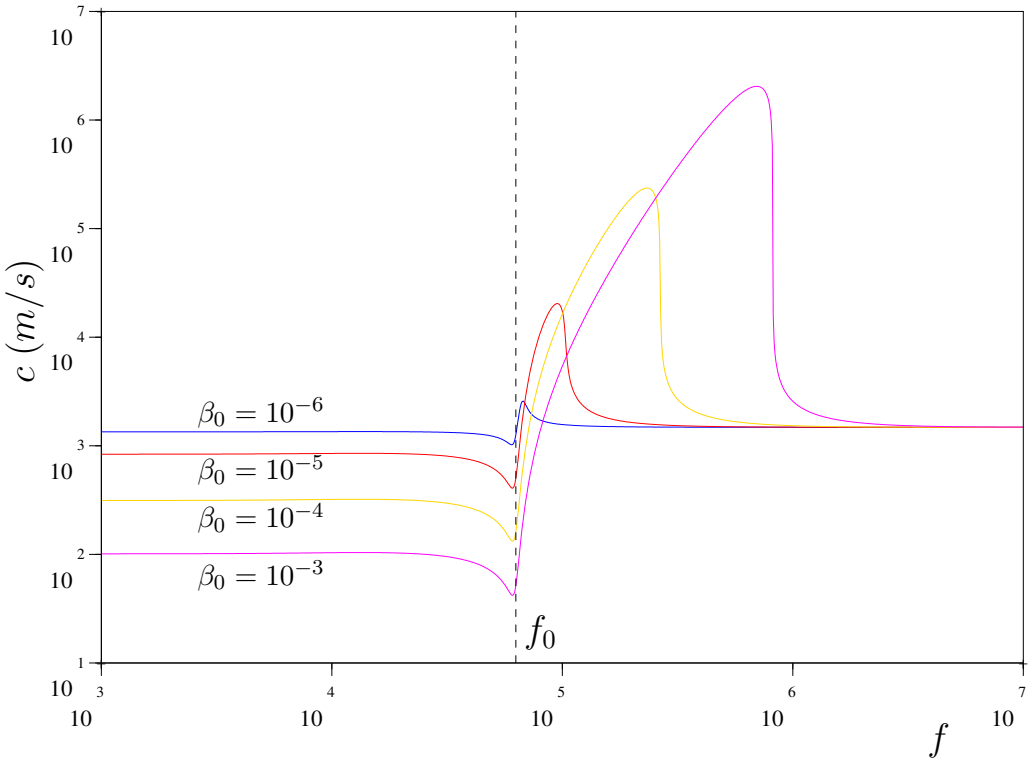
A l'extrémité gauche du tube en $x = 0$ est placée une source acoustique sinusoïdale de fréquence f ; on supposera que cette source est capable d'imposer ou une vitesse $u_a(t)$ ou une pression $p_a(t)$. A l'extrémité droite est placé un réflecteur, dont la définition est différée dans la section suivante. Le problème est défini par l' équation (2.47), le nombre d'onde k étant constant dans l'espace, et donné par la relation de dispersion (2.49). Cette équation admet des solutions analytiques classiques Morse and Ingard (1968) décrivant des ondes stationnaires, que nous examinons ci-dessous.

Notons que la configuration décrite ci-dessus correspond à une vérification expérimentale célèbre de la relation de dispersion obtenue plus haut Silberman (1957) sur laquelle nous reviendrons dans la section suivante.

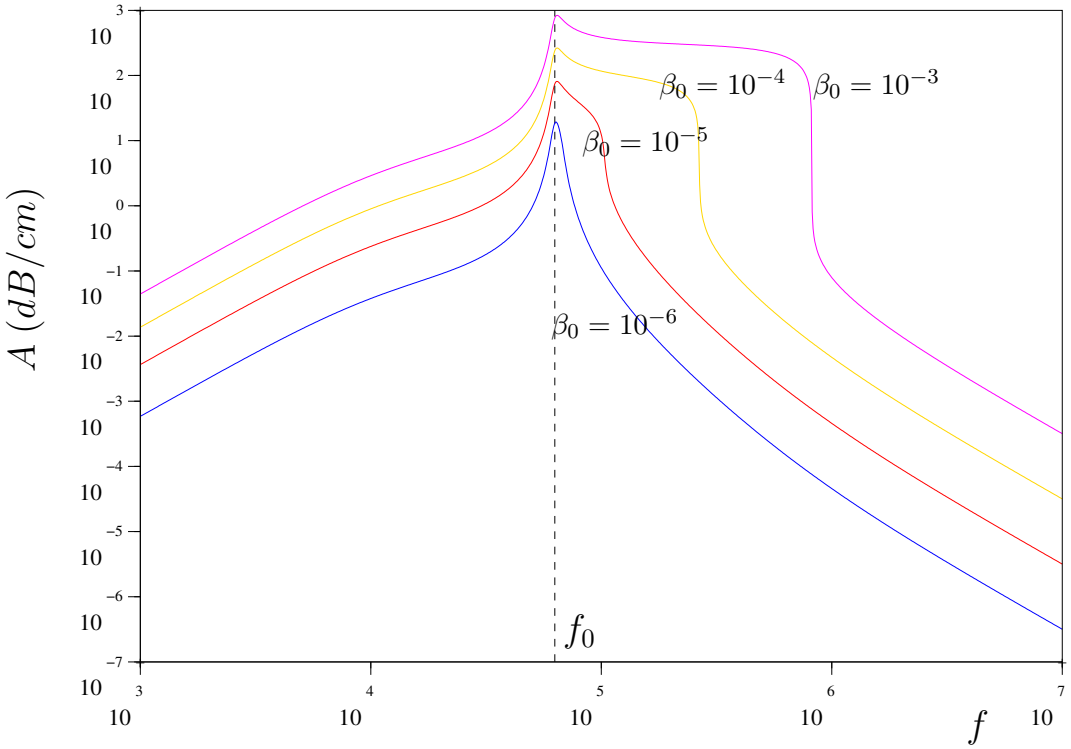
2.4.1 Solution générale

Les solutions de (2.47) peuvent être écrites comme la superposition
– d'une onde progressant dans le sens des x croissants $P_+ \exp(ikx - i\omega t)$
– d'une onde progressant dans le sens des x décroissants $P_- \exp(-ikx - i\omega t)$
les coefficients P_+ et P_- étant déterminés à partir des conditions aux limites en $x = 0$ et en $x = L$. Il est plus pratique d'écrire les grandeurs en termes d'amplitude et de phase. On peut choisir arbitrairement Morse and Ingard (1968)

$$p(x,t) - p_0 = \underbrace{P_0 \cosh[ikd + \psi]}_{P(x)} \; e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \tag{2.53}$$



(a) Vitesse de phase



(b) Atténuation

FIGURE 2.6 – Représentation graphique de la relation de dispersion.

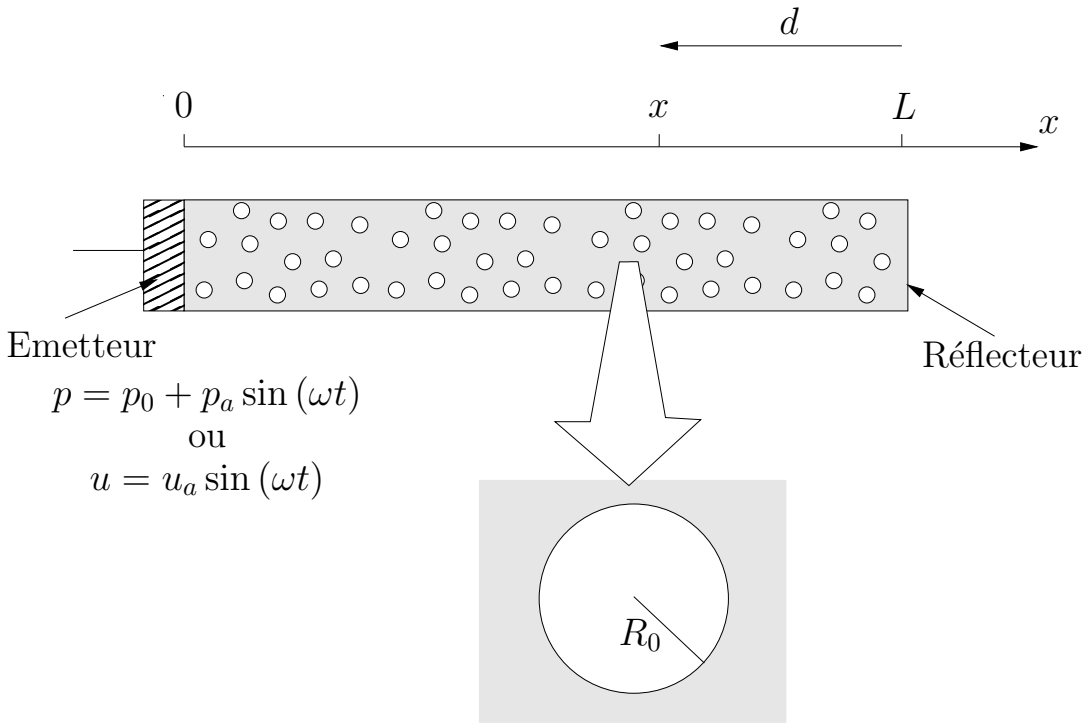


FIGURE 2.7 – Géométrie étudiée : on suppose que la taille de la source et celle du tube sont égales afin d'engendrer une onde plane. Les bulles sont supposées déjà formées, uniformément réparties et toutes de même rayon d'équilibre.

avec d distance comptée à partir du réflecteur :

$$d = L - x \tag{2.54}$$

Il est important de noter que P_0 et ψ sont des grandeurs complexes. L'équation (2.29) fournit alors la vitesse u sous la forme

$$u(x,t) = \underbrace{-U_0 \sinh\left[ikd + \psi\right]}_{U(x)} \, e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \tag{2.55}$$

avec

$$U_0 = \frac{k}{\rho\omega} P_0 = \frac{P_0}{\rho c} \tag{2.56}$$

où $c = \omega/k$ est la vitesse de phase complexe dans le milieu, déduite de la relation de dispersion (2.49). Pour la suite considérons que la source impose une pression sinusoïdale, soit

$$p(0,t) - p_0 = p_a e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \tag{2.57}$$

L'amplitude complexe P_0 s'exprime alors par

$$P_0 = \frac{p_a}{\cosh\left(ikL + \psi\right)} \tag{2.58}$$

Une information intéressante est l'enveloppe de l'onde stationnaire, c'est-à-dire les courbes des maxima de $p(x,t)$ en chaque point x. Cette grandeur est clairement déterminée par le module de l'amplitude complexe $P(x)$. Ecrivons les grandeurs complexes k et ψ sous la forme

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} + ik_i \tag{2.59}$$

$$\psi = \psi_r + i\psi_i \tag{2.60}$$

L'enveloppe de l'onde stationnaire est alors donnée par

$$|P(x)| = |p_a| \left[\frac{\cos^2\left(\dfrac{2\pi d}{\lambda} + \psi_i\right) + \sinh^2\left(k_i d - \psi_r\right)}{\cos^2\left(\dfrac{2\pi L}{\lambda} + \psi_i\right) + \sinh^2\left(k_i L + \psi_r\right)} \right]^{1/2} \tag{2.61}$$

Nous allons montrer dans les sections suivantes que tous les cas de figure peuvent être retrouvés à partir de cette expression.

2.4.2 Onde stationnaire parfaite

Considérons cette expression pour $\psi_r = 0$ et $k_i = 0$ (nous reviendrons sur le sens physique de ces grandeurs dans les sections suivantes). Les termes en sinh sont alors nuls, et il apparaît que le dénominateur de (2.61) peut s'annuler pour des longueurs L telles que

$$\frac{2\pi L}{\lambda} + \psi_i = (2n+1)\frac{\pi}{2} \tag{2.62}$$

Dans ce cas l'enveloppe tend vers l'infini et la cavité acoustique est dite résonante [9].

Si le dénominateur n'est pas nul, la solution consiste alors en une succession de ventres, où la pression est maximale, distants de $\lambda/2$ et de noeuds, ou la pression est nulle, à mi-distance des ventres. La position d_1 du premier ventre en partant du réflecteur est déterminée par le plus petit entier n tel que

$$d_1 = -\frac{\psi_i}{2\pi}\lambda + n\frac{\lambda}{2} \tag{2.63}$$

soit positif. (voir figure 2.8, colonne de gauche).

2.4.3 Influence du réflecteur

Nous montrons ici que la phase ψ est liée à la nature du réflecteur. Pour cela, considérons le cas où k_i est nul (k et c sont donc réels), et examinons le sens physique de la phase ψ. Pour cela, calculons l'impédance complexe en chaque point du milieu :

$$\frac{P(x)}{U(x)} = -\rho c \coth\left[ikd + \psi\right] \tag{2.64}$$

Evaluée en $x = L$ ($d = 0$), cette relation permet de relier la phase ψ à l'impédance acoustique du réflecteur

$$\frac{P(L)}{U(L)} = -\rho c \coth\psi = -\rho c \frac{\sinh 2\psi_r - i\sin 2\psi_i}{\cosh 2\psi_r - \cos 2\psi_i} \tag{2.65}$$

Si cette grandeur est purement imaginaire ($\psi_r = 0$), le réflecteur ne fait que déphaser la pression par rapport à la vitesse, mais réfléchit totalement l'onde.

9. En termes mathématiques, k correspond alors à la solution d'un problème aux valeurs propres.

C'est le cas pour un réflecteur parfaitement élastique pour lequel la force et la vitesse sont en quadrature de phase. Deux cas particuliers importants entrent dans cette catégorie : la paroi infiniment rigide ($u = 0$, impédance infinie, $\psi = 0$), par exemple un matériau solide suffisamment épais obturant le tube, et la paroi infiniment souple ($p = 0$, impédance nulle, $\psi = i\pi/2$) correspondant approximativement à une surface libre liquide-air.

En revanche, le cas où $P(L)/U(L)$ a une partie réelle non nulle ($\psi_r \neq 0$) correspond à un réflecteur absorbant une partie de l'onde. C'est le cas par exemple si le milieu est limité par un milieu d'impédance acoustique différente. Nous verrons dans la section suivante que la paroi est réceptrice d'énergie si $\psi_r < 0$.

La colonne de droite de la figure 2.8 montre l'influence d'un réflecteur absorbant par rapport à un réflecteur parfait (colonne de gauche). Les noeuds et les ventres sont placés à la même position, mais pour un réflecteur absorbant, l'amplitude aux noeuds n'est plus nulle. Cela vient du fait que l'onde réfléchie est d'amplitude inférieure à l'onde incidente et ne peut donc la compenser exactement. Nous désignerons malgré tout par «noeuds» les points où l'enveloppe est minimale.

Un réflecteur est totalement absorbant pour $\coth \psi = -1$, soit $\psi_r = -\infty$, ce qui correspond à une interface avec un milieu de même impédance acoustique. Dans ce cas, il est clair d'après (2.61) que le profil de l'enveloppe est constant et égal à $|p_a|$, ce qui correspond à une onde progressive.

Notons enfin que le phénomène de résonance mentionné précédemment, donné par des longueurs L vérifiant (2.62) ne peut plus se produire en présence d'un réflecteur absorbant.

2.4.4 Atténuation de l'onde

L'atténuation de l'onde est liée à la partie imaginaire du nombre d'onde k, qui comme nous l'avons vu provient des amortissements des oscillations des bulles, mais aussi de l'apparente compressibilité négative dans une zone de fréquences au-delà de la fréquence de résonance.

L'expression (2.61) montre alors que l'enveloppe est une fonction décroissante de x, et la figure (2.9) montre différents profils obtenus pour différentes valeurs de k_i (avec un réflecteur parfait). Lorsque ce dernier est très élevé

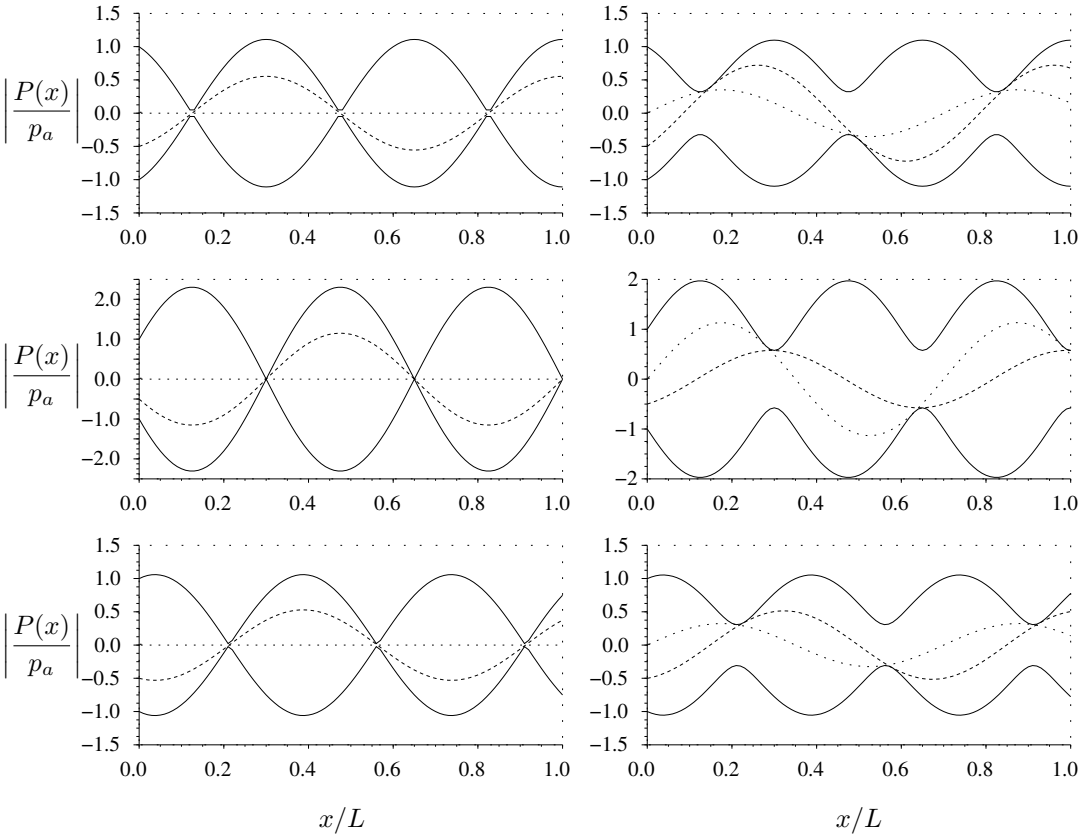


FIGURE 2.8 – Influence du réflecteur sur le profil d'onde stationnaire : ($L = 1$, $p_a\sqrt{2} = 1$, $\lambda = 0.7$). La grandeur représentée est p. A gauche, réflecteur parfait $\psi_r = 0$, à droite $\psi_r = 0.3$. De haut en bas, $\psi_i = 0$, $\pi/2$, $\pi/4$. Les courbes en traits pleins représentent l'enveloppe, la courbe en pointillés épais l'allure du profil en $\omega t = 2\pi/3$ et la courbe en pointillés fins en $\omega t = \pi/2$.

(c'est le cas juste au-delà de la fréquence de résonance), l'amortissement est tel que les ventres ne sont plus visibles. Dans ce dernier cas l'influence du type du réflecteur disparaît (voir les deux courbes du bas de la figure 2.9), ce qui s'explique par le fait que l'onde incidente est totalement amortie avant d'arriver au réflecteur.

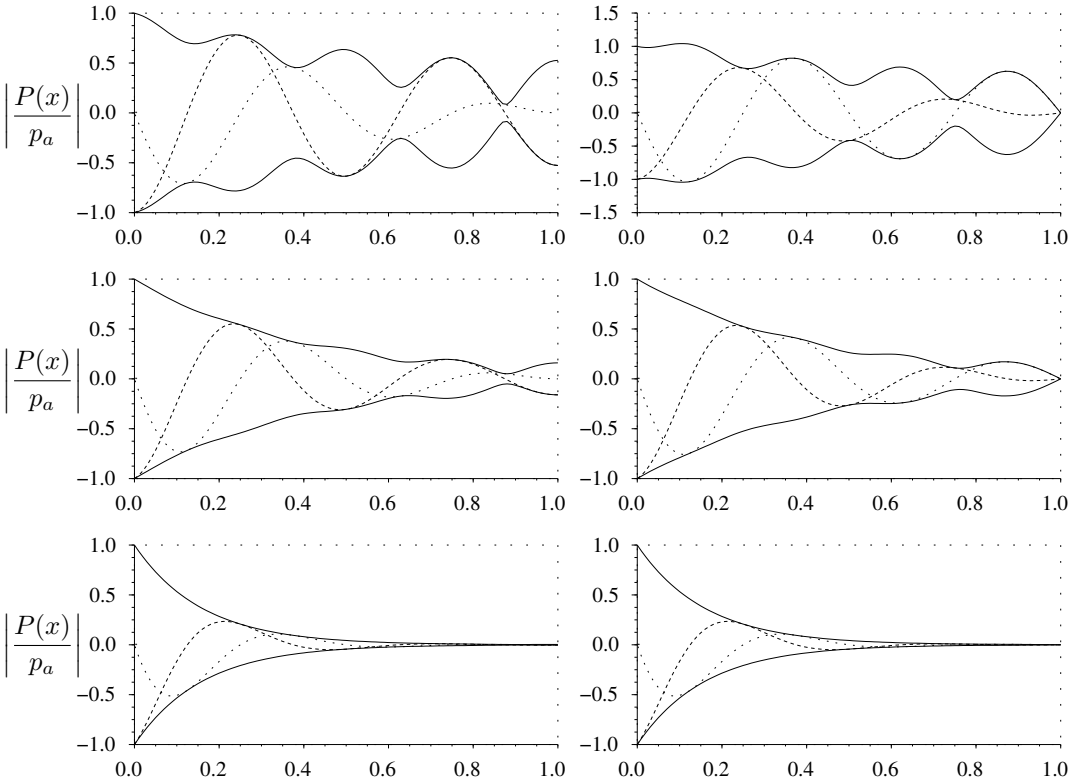


FIGURE 2.9 – Ondes stationnaires atténuées ($L = 1$, $p_a\sqrt{2} = 1$, $\lambda = 0.7$). La grandeur représentée est p. Les courbes en traits pleins représentent l'enveloppe, la courbe en pointillés épais l'allure du profil en $\omega t = \pi$ et la courbe en pointillés fins en $\omega t = \pi/2$. A gauche, réflecteur parfait type paroi rigide ($\psi_i = 0$), à droite réflecteur parfait type surface libre ($\psi_i = \pi/2$). De haut en bas, $\operatorname{Im} k = \operatorname{Re} k/10$, $\operatorname{Re} k/5$, $\operatorname{Re} k/2$.

2.4.5 Aspects énergétiques

Calculons le flux d'énergie mécanique, ou intensité acoustique $p\mathbf{u}$ en un point x du tube.

$$p\mathbf{u}(x) = \left[P(x)e^{-i\omega t} + \overline{P(x)}e^{i\omega t}\right]\left[U(x)e^{-i\omega t} + \overline{U(x)}e^{i\omega t}\right]\mathbf{e_x} \tag{2.66}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[P(x)\overline{U(x)}\right]\mathbf{e_x} + \text{osc.} \tag{2.67}$$

où $\mathbf{e_x}$ désigne le vecteur unitaire suivant l'axe x, et où le terme «osc.» décrit des termes oscillants à la fréquence 2ω dont la moyenne sur une période est nulle. La relation (2.56) nous permet d'exprimer les amplitudes complexes P_0 et U_0 sous la forme

$$P_0 = |P_0|e^{i\phi} \tag{2.68}$$

$$U_0 = |U_0|e^{i(\phi+\delta)} \tag{2.69}$$

où la phase δ est donnée par

$$\tan\delta = \frac{\mathrm{Im}\,k}{\mathrm{Re}\,k} = \frac{\lambda k_i}{2\pi} \tag{2.70}$$

et devient nulle lorsque k est réel, c'est-à-dire lorsque le milieu est non-dissipatif. En utilisant les expressions (2.53)-(2.55) pour la pression et la vitesse, on obtient la moyenne du flux d'énergie sur une période

$$\langle p\mathbf{u}\rangle(x) = |P_0||U_0|\left[\sinh 2(k_i d - \psi_r)\cos\delta + \sin 2\left(\frac{2\pi d}{\lambda} + \psi_i\right)\sin\delta\right]\mathbf{e_x} \tag{2.71}$$

Dans le cas d'une onde stationnaire parfaite (milieu non dissipatif ($k_i = \delta = 0$) et réflecteur parfait ($\psi_r = 0$)), ce flux est nul en tout point. Il l'est en particulier en $x = 0$, ce qui indique que la puissance moyenne fournie par la source sur une période est nulle.

Pour un milieu non-dissipatif et un réflecteur absorbant, le flux d'énergie est constant le long du tube et vaut

$$\langle p\mathbf{u}\rangle(x) = -|P_0||U_0|\sinh(2\psi_r)\,\mathbf{e_x} \tag{2.72}$$

Le milieu se comporte alors comme un transmetteur d'énergie entre la source acoustique et la paroi, qui peut être par exemple une interface avec un milieu différent. On voit clairement d'après cette expression que si la paroi est un système mécanique dissipatif, le flux d'énergie doit être nécessairement positif

et donc $\psi_r < 0$. Toute la puissance fournie par la source est transmise sans pertes dans le milieu et consommée par la paroi.

Considérons maintenant le cas où le milieu est dissipatif : l'expression (2.71) montre que le flux d'énergie décroit à mesure que l'on s'éloigne de la source, chaque «tranche» du milieu absorbant une partie de l'énergie acoustique. La puissance totale consommée par l'ensemble milieu de propagation + source peut être évaluée en exprimant (2.71) en $x = 0$ ($d = L$).

Nous présentons maintenant une validation expérimentale de la relation de dispersion linéaire basée sur les résultats théoriques présentés ci-dessus.

2.4.6 Mesures d'atténuation et de la vitesse de phase

Les mesures de Silberman (1957) sont considérées comme les plus facilement comparables avec la théorie, eu égard à la faible polydispersité des bulles utilisées.

Le dispositif expérimental est décrit figure 2.10 : un générateur de sons est fixé dans la partie basse d'un tube de diamètre suffisamment faible pour disposer d'une onde quasi-plane. Des bulles calibrées sont injectées à la base du tube et son extrémité haute est laissée à l'air libre de telle sorte que l'onde acoustique est quasi-totalement réfléchie. Il apparaît donc un régime d'ondes stationnaires, dont le profil peut être mesuré à l'aide d'un hydrophone. Cette configuration est en tous points comparable à celle que nous avons envisagé dans les sections précédentes (figure 2.7). La longueur d'onde, et donc la vitesse de phase, est obtenue en mesurant la distance $\lambda/2$ entre deux ventres successifs, et l'atténuation déduite de la mesure des pressions acoustiques en ces deux ventres.

Les auteurs indiquent que dans certains cas, l'onde est amortie quasi-totalement sur moins d'une demi-longueur d'onde à partir de la source, auquel cas la vitesse de phase ne peut plus être mesurée. L'atténuation peut malgré tout être obtenue en mesurant l'amplitude en deux points proches de la source. Ce cas correspond clairement au domaine de fréquences défini par (2.52), pour lequel la partie réelle de k^2 est négative, et donc l'amortissement très élevé. Le profil de pression dans une telle configuration serait comparable aux deux courbes du bas de la figure 2.9.

Silberman (1957) a comparé ses résultats avec une théorie approximative due à Willis et Spitzer, mais une comparaison plus systématique avec le modèle de Caflish linéarisé a été entreprise par Commander and Prosperetti (1989).

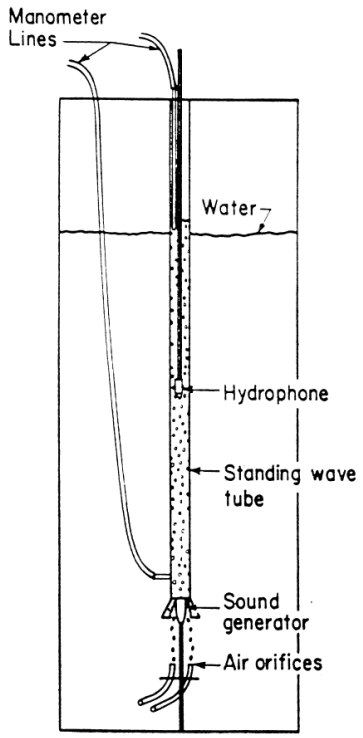


FIGURE 2.10 – D'après Silberman (1957) : dispositif expérimental de mesure de la vitesse de phase et de l'atténuation dans un liquide à bulles.

La figure 2.11 montre un extrait de ces résultats : les valeurs de la vitesse de phase et de l'atténuation sont en bon accord avec la théorie lorsque la fréquence acoustique est très inférieure à la fréquence propre des bulles. En revanche, au-delà de la fréquence de résonance, l'amortissement prédit par la théorie est largement supérieur à l'amortissement mesuré. Les auteurs ont tenté d'obtenir une meilleure corrélation en faisant varier la distribution de bulles dans le second membre de (2.48), mais la conclusion reste la même.

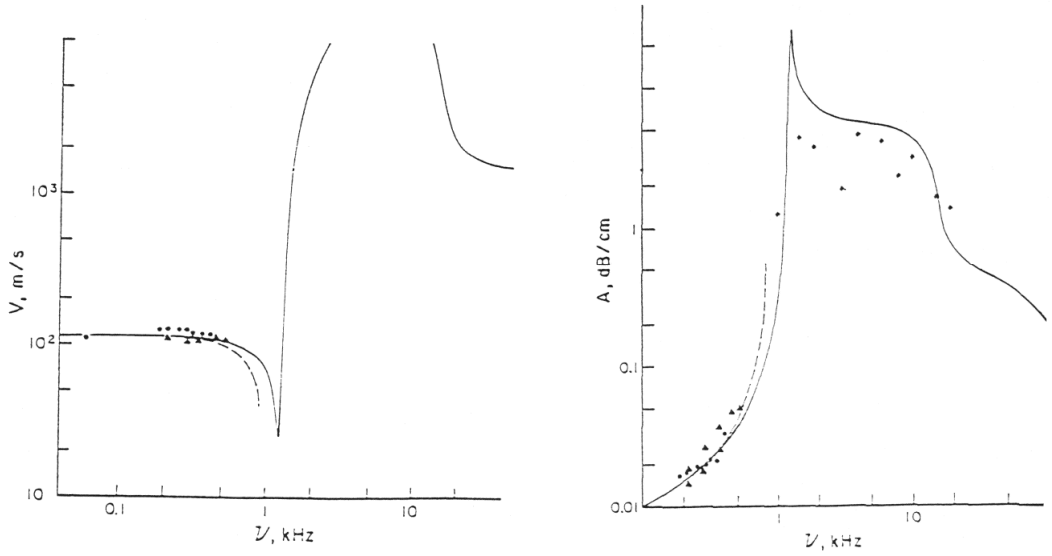


FIGURE 2.11 – D'après Commander and Prosperetti (1989) : à gauche vitesse de phase ; à droite atténuation. Les points correspondent aux données expérimentales de Silberman (1957) : triangles : $R_0 = 3.64$ mm ; cercles : $R_0 = 2.68$ mm ; losanges : $R_0 = 2.60$ mm. Les courbes en traits pleins correspondent à la relation de dispersion (2.49) calculée pour $R_0 = 2.68$ mm, et celle en traits pointillés pour $R_0 = 3.41$ mm. Le taux de gaz vaut 1 %.

2.4.7 Synthèse

Nous avons montré dans cette section les résultats que nous pouvons attendre du modèle de Caflish dans le cadre linéaire pour des bulles monodisperses et uniformément réparties, ainsi qu'une confirmation expérimentale de ces résultats. Outre une clarification du sens de la relation de dispersion, ces résultats analytiques seront comparées aux résultats de simulation du chapitre 4 obtenus dans le cadre non-linéaire, et nous permettra de déterminer entre autres

à partir de quelle amplitude d'excitation l'hypothèse linéaire peut être mise en défaut.

L'hypothèse simplificatrice, que nous continuerons à utiliser, selon laquelle la source impose soit la pression soit la vitesse, est bien entendu limitative, et très éloignée de la réalité physique des transducteurs ultrasoniques. En fait, le système générateur électrique + transducteur constitue lui-même une chaîne de transmission de l'énergie entre le secteur et le milieu. L'ensemble liquide cavitant+réflecteur constitue la charge mécanique de cette chaîne.

2.5 Ondes non-linéaires

Nous avons établi facilement le caractère dispersif des ondes décrites par les équations de Caflish linéarisées. Le prolongement de ces résultats dans le cadre non-linéaire (c'est-à-dire pour des perturbations d'amplitude finie) est délicat : les équations n'admettent pas en général de solution analytique, et l'interaction entre non-linéarité et dispersion introduit une grande diversité de solutions.

L'exploration numérique des équations de Caflish non-linéaires fera l'objet du chapitre 4, mais nous souhaitons mentionner ici une approche analytique de ces équations, valable dans le domaine des basses fréquences, et pour des perturbations d'amplitude modérée.

Ce type d'approche, classique dans l'étude des vagues Whitham (1974), consiste à réduire le modèle à une équation canonique intégrant la dispersivité du milieu, sa non-linéarité, et éventuellement son caractère dissipatif. Cette équation, obtenue il y a plus d'un siècle porte le nom d'équation de Korteweg-de Vries (KdV). L'ajout d'un terme dissipatif conduit à l'équation Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB).

Le plan de cette section est le suivant : dans un premier temps, nous interpréterons physiquement les causes et les conséquences de la non-linéarité du liquide à bulles. Ensuite, la réduction à une équation du type Korteweg-de Vries n'ayant été effectuée dans la littérature que pour le modèle de IK-vanW, il nous a semblé intéressant de la reprendre pour le modèle de Caflish, en suivant une méthode mathématique rigoureuse. L'équation obtenue sera interprétée physiquement a posteriori.

2.5.1 Approche physique

2.5.1.1 Compressibilité du liquide à bulle

L'acoustique linéaire suppose que les variations de densité du milieu autour de la valeur d'équilibre sont faibles et proportionnelles aux variations de pression autour de la valeur d'équilibre, ce qui sous-entend que la compressibilité du milieu, donc la vitesse du son, est indépendante de l'amplitude de la perturbation. Pour des amplitudes plus élevées, cela n'est plus vrai car l'équation d'état ne peut plus être linéarisée autour du point d'équilibre et des termes d'ordre supérieur apparaissent.

Le principe est le même pour l'acoustique d'un liquide à bulles, la non-linéarité ne provenant plus d'une équation d'état, mais des oscillations des bulles. La compressibilité globale du milieu est approximativement celle des bulles. Ecrivons la vitesse du son par sa définition $c^2 = dp/d\rho$, la densité moyenne du milieu liquide-bulle étant $\rho_l(1-\beta)$:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{d\rho}{dp} = -\rho_l \frac{d\beta}{dp} = -\frac{4\pi}{3} N \rho_l \frac{dV_g}{dp}$$

où V_g est le volume d'une bulle qui voit infiniment loin d'elle la pression moyenne p. A basse fréquence (et pour des amplitudes modérées), on peut considérer que la bulle réagit de manière quasi-statique aux variations de pression à l'infini, et négliger le mouvement radial du liquide [10]. Dans ces conditions, aux termes de tension superficielle et de viscosité près, la pression à l'infini de la bulle et la pression dans le gaz sont égales, et, en supposant un comportement polytropique de ce dernier, la vitesse du son devient

$$\frac{1}{c^2} = \frac{4\pi}{3} \frac{N\rho_l}{\eta} \frac{p_0^{1/\eta} V_{g0}}{p^{1+1/\eta}} = \frac{\beta_0 \rho_l}{\eta} \frac{p_0^{1/\eta}}{p^{1+1/\eta}} \tag{2.73}$$

Il apparaît que la vitesse du son dépend de p, donc de l'état de compression du milieu. Plus précisément, la vitesse du son est une fonction croissante de la pression. Physiquement, on peut dire qu'une bulle déjà comprimée est moins compressible qu'une bulle en détente, et que la raideur du milieu (et donc la vitesse du son) est plus importante lorsque celui-ci est en compression.

10. Ce faisant, nous négligeons le premier membre de l'équation de Rayleigh, ou encore l'énergie cinétique du liquide, et donc le caractère dispersif de l'onde

2.5.1.2 Ondes cinématiques et raidissement

L'équation qui décrit une onde se propageant dans le sens des x positifs, avec une célérité $c(p)$ dépendant de la pression, s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c(p)\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{2.74}$$

Les solutions de cette équation sont appelées «ondes cinématiques» Whitham (1974), et interviennent dans de nombreux domaines (dynamique des gaz, trafic routier). Cette équation peut s'écrire sous forme dite «caractéristique»

$$\frac{dp}{dt} = 0 \qquad \text{sur les courbes } \frac{dx}{dt} = c(p)$$

et il s'ensuit que p est constante sur ces courbes. La pente $c(p)$ de chaque courbe ne dépendant que de p, elle est donc constante, et ces courbes caractéristiques sont par conséquent des droites.

La figure 2.12 montre alors la situation lorsqu'une source acoustique est placée en $x = 0$: certaines caractéristiques coupent l'axe des x, et sont issues du milieu au repos, par conséquent $p = p_0$ le long de ces dernières, et leur pente dx/dt vaut $c(p_0)$. Les autres caractéristiques coupent l'axe des t, et la pression, et donc la pente de ces dernières est imposée par la pression de la source.

Les solutions de l'équation peuvent alors être exprimées sous forme paramétrique :

$$p(x,t) = f(\tau) \tag{2.75}$$

$$x = c(f(\tau))(t - \tau) \tag{2.76}$$

où $f(\tau)$ représente l'évolution temporelle de la pression imposée par la source. Cela signifie qu'une caractéristique est entièrement déterminée par son intersection τ avec l'axe des t, sa pente étant alors donnée par $c(f(\tau))$.

Puisque la pente d'une caractéristique dépend de la pression à la source, celle-ci variant au cours du temps, certaines caractéristiques convergent les unes vers les autres. Pour la figure 2.12 où $c(p)$ est une fonction croissante de p, c'est le cas lorsque la source impose une pression croissante au cours du temps. La conséquence sur les formes d'ondes est illustrée figure 2.13, où l'on examine l'évolution d'une onde sinusoïdale (1) : les parties de l'onde où la pression est plus élevée se propagent plus vite, et rattrapent les parties où la pression est plus faible, ce qui tend à «raidir» la partie compressive de l'onde.

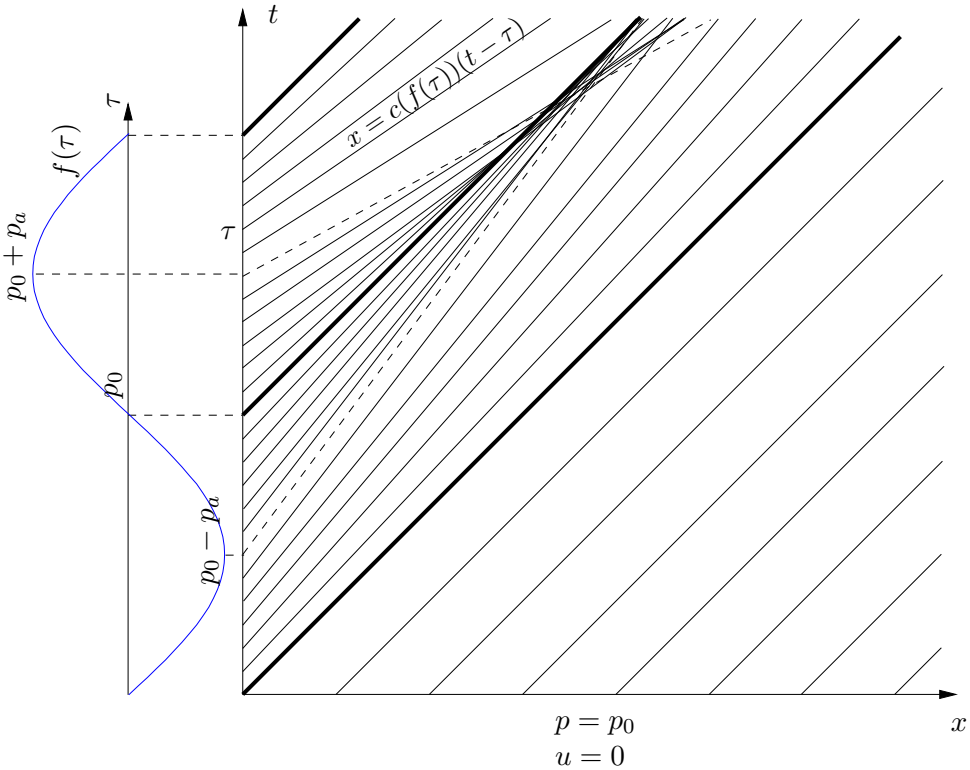


FIGURE 2.12 – Courbes caractéristiques de l'équation (2.74) avec une source sinusoïdale commençant par une phase de dépression. Les courbes en gras correspondent à $p = p_0$, $dx/dt = c(p_0)$. Les deux lignes en pointillé correspondent aux vitesses de propagation maximale et minimale.

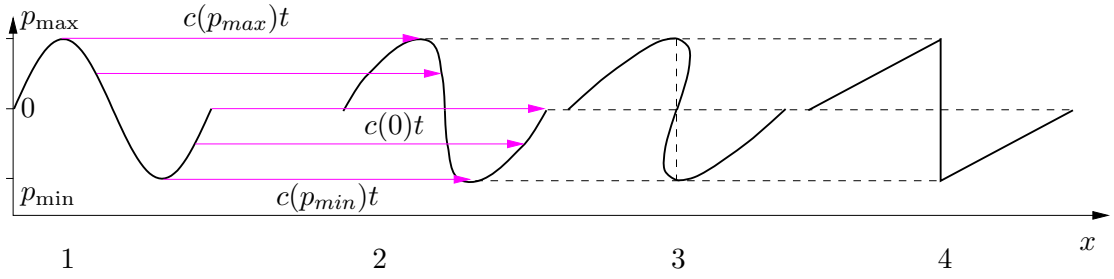


FIGURE 2.13 – Mécanisme de raidissement d'une onde sinusoïdale : la partie compressive de l'onde se propage plus vite.

Si ce raidissement se poursuit, un paradoxe apparaît : il arrive un moment (3) où le profil devient multivalué et présente des pentes infinies, ce qui correspond au point du plan (x, t) de la figure 2.12 où deux caractéristiques convergentes se coupent.

En fait, à partir du moment où les dérivées deviennent infinies, une discontinuité (ou «choc») est formée. L'onde tend asymptotiquement vers un profil en dent de scie noté (4). Mathématiquement, l'équation (2.74) n'est plus valable sous cette forme dès l'apparition de pentes infinies.

La propagation de chocs dans les liquides à bulles est une réalité physique sur laquelle nous reviendrons. Le phénomène de raidissement décrit ci-dessus est une conséquence de la non-linéarité du problème, et découle simplement de la dépendance de la vitesse du son par rapport à l'état de compression. L'équation (2.74) rend compte de ce phénomène mais est incomplète quant à la prise en compte des phénomènes dissipatifs d'une part et de la dispersion d'autre part.

Les phénomènes dissipatifs proviennent des différentes causes d'amortissement du mouvement de la bulle, et tendent à limiter le raidissement des parties compressives de l'onde. La dispersion provient du mouvement du liquide autour de la bulle, et tend à séparer les unes des autres les différentes composantes harmoniques de l'onde.

Chacun ces deux effets ajoute un terme supplémentaire à l'équation (2.74). Ces termes correctifs, ainsi que la vitesse de propagation $c(p)$ sont explicités rigoureusement dans la section suivante, et conduisent à une équation de Korteweg-de Vries-Burgers.

2.5.2 Réduction du modèle de Caflish à une équation de KdVB

Dans une discussion sur le premier article de van Wijngaarden (1966) mentionnant le caractère dispersif des liquides à bulles, Benjamin (1966) suggère une analogie entre les ondes dans ce type de milieu et la propagation des vagues, et réduit les équations proposées par van Wijngaarden (1966) à une équation de Korteweg-de Vries (KdV). Cette réduction est ensuite reprise plus rigoureusement par van Wijngaarden (1968) et van Wijngaarden (1972); Kuznetsov et al. (1976); Prosperetti (1991) obtiennent une équation de Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB) en incluant les phénomènes dissipatifs.

Puisque nous utilisons le modèle de Caflish, légèrement différent des équations de IKvanW, nous nous proposons de montrer ci-dessous que ce modèle peut être également réduit à une équation de Korteweg-de Vries-Burgers, en énonçant clairement les conditions de validité de cette réduction. De plus, la méthode rigoureuse employée ici, basée sur une hiérarchie d'équations en fonction d'un petit paramètre, clarifie certaines étapes de calcul parfois un peu obscures dans ce type de développement.

2.5.2.1 Approche envisagée

Rappelons les deux premières équations de Caflish [11] (2.28) et (2.29)

$$\frac{1}{\rho_l c_l^2} p_t + u_x = 4\pi N R^2 R_t \tag{2.77}$$

$$\rho_l u_t + p_x = 0 \tag{2.78}$$

Pour que ce système de deux équations soit fermé, il faudrait pouvoir exprimer R en fonction de p, autrement dit résoudre l'équation de Rayleigh. Nous avons vu que dans le cadre linéaire, ceci s'avérait possible. Nous chercherons donc ici à pousser cette inversion dans le cadre faiblement non-linéaire, en exploitant le fait que la fréquence est très inférieure à la fréquence de résonance des bulles.

Dans un premier temps, nous réduirons donc ainsi le modèle de Caflish à un système d'équations non-linéaire sur u et p, décrivant des ondes se propageant

11. Pour alléger l'écriture et respecter l'usage dans ce type de problème, les dérivées partielles par rapport à x et t seront notées avec x et t en indice.

indifféremment dans les deux sens. Ensuite, pour des ondes unidirectionnelles, nous réduirons ce système à une équation unique sur p, qui est précisément l'équation de KdVB.

2.5.2.2 Adimensionalisation

Nous écrivons la pression et le rayon de la bulle sous la forme

$$p = p_0(1 + P^*) \tag{2.79}$$
$$R = R_0(1 + R^*) \tag{2.80}$$

La variable t est adimensionalisée par la fréquence de l'excitation. Par ailleurs, comme nous nous intéressons à des fréquences très basses, la vitesse de propagation est proche de c_m, vitesse de phase donnée par la relation de dispersion (2.49) pour $\omega = 0$:

$$\frac{1}{c_m^2} = \frac{1}{c_l^2} + \frac{3\beta_0}{R_0^2\omega_0^2} \tag{2.81}$$

Pour simplifier le problème, nous considérerons ici que le gaz dans la bulle se comporte de façon polytropique. Nous négligerons de plus la tension superficielle. Dans ces conditions, la fréquence de résonance s'exprime par

$$\omega_0^2 = \frac{p_0 3\eta}{\rho_l R_0^2}$$

et la vitesse de phase à fréquence nulle s'écrit donc aussi

$$\frac{1}{c_m^2} = \frac{1}{c_l^2} + \frac{\beta_0\rho_l}{\eta p_0} \tag{2.82}$$

La variable d'espace x sera adimensionalisée par la longueur d'onde correspondant à cette vitesse, d'où

$$t = \frac{\tau}{\omega} \tag{2.83}$$
$$x = \frac{c_m}{\omega}\xi \tag{2.84}$$

Enfin, la vitesse est reliée à une onde linéaire d'amplitude P^* progressant à la vitesse c_m, soit

$$u = \frac{p_0}{\rho_l c_m}U^* \tag{2.85}$$

Nous nous intéressons à des perturbations d'amplitude faible. On notera ϵ l'amplitude de la perturbation émise par la source rapportée à p_0. Nous recherchons ensuite les différentes grandeurs physiques sous la forme de développements asymptotiques par rapport à ce petit paramètre ϵ, soit

$$\begin{aligned} P^* &= \epsilon P^0 + \epsilon^2 P^1 + \dots \\ R^* &= \epsilon R^0 + \epsilon^2 R^1 + \dots \\ U^* &= \epsilon U^0 + \epsilon^2 U^1 + \dots \end{aligned} \tag{2.86}$$

2.5.2.3 Réduction de l'équation de Rayleigh.

Avec les hypothèses précédentes, l'équation de Rayleigh s'écrit, en fonction des nouvelles variables :

$$(1+R^*){R^*}_{\tau\tau} + \frac{3}{2}{R^*_\tau}^2 = \frac{p_0}{\rho_l R_0^2 \omega^2}\left[\left(\frac{1}{1+R^*}\right)^{3\eta} - \frac{4\mu\omega}{p_0}\frac{{R^*}_\tau}{1+R^*} - (1+P^*)\right] \tag{2.87}$$

Nous nous intéressons à des fréquences très inférieures à la fréquence de résonance de telle sorte que ω/ω_0 est faible. Par ailleurs la viscosité est également supposée faible. Nous considérons donc les deux petits paramètres suivants, que nous rapportons à l'amplitude ϵ de la perturbation par

$$\mathcal{O} = \frac{\omega}{\omega_0} = \epsilon^{1/2}\Omega \qquad \mathcal{M} = \frac{4\mu\omega_0}{p_0} = \epsilon^{1/2} M \tag{2.88}$$

L'équation (2.87) se réécrit alors :

$$3\eta\epsilon\Omega^2\left[{R^*}_{\tau\tau} + (R^*{R^*}_{\tau\tau} + \frac{3}{2}{R^*_\tau}^2)\right] = \left(\frac{1}{1+R^*}\right)^{3\eta} - \epsilon M\Omega\frac{{R^*}_\tau}{1+R^*} - (1+P^*) \tag{2.89}$$

En remplaçant P^* et R^* par leurs développements asymptotiques (2.86), on obtient alors une hiérarchie d'équations sur chaque puissance de ϵ. A l'ordre 1, on obtient :

$$P^0 = -3\eta R^0 \tag{2.90}$$

Cette relation signifie physiquement que la pression à l'infini de la bulle est égale à la pression dans la bulle, donnée par la relation polytropique linéarisée. Cela revient donc à considérer que l'énergie cinétique du liquide est nulle, ce qui est bien le cas à basse fréquence, où la bulle suit instantanément les variations de pression à l'infini. A l'ordre 2, l'équation obtenue est

$$P^1 = -3\eta\left(R^1 - \frac{3\eta+1}{2}{R^0}^2\right) - M\Omega R^0_\tau - 3\eta\Omega^2 R^0_{\tau\tau} \tag{2.91}$$

En utilisant l'équation à l'ordre 1 (2.90), on peut exprimer R^1 en fonction de P^1 et P^0, soit

$$R^1 = -\frac{1}{3\eta}\left(P^1 - \frac{3\eta+1}{6\eta}P^{0^2}\right) + \frac{1}{(3\eta)^2}M\Omega P^0_\tau + \frac{1}{3\eta}\Omega^2 P^0_{\tau\tau} \tag{2.92}$$

qui est le résultat recherché.

2.5.2.4 Réduction des équations de Caflish

Les deux premières équations de Caflish (2.77)-(2.78) s'écrivent en fonction des variables adimensionnelles :

$$\left(\frac{c_m}{c_l}\right)^2 P^*_\tau + U^*_\xi = \frac{3\beta_0\rho_l c_m^2}{p_0}(1+R^*)^2 R^*_\tau \tag{2.93}$$

$$U^*_\tau + P^*_\xi = 0 \tag{2.94}$$

En remplaçant les grandeurs P^*, U^* et R^* par leurs développements asymptotiques, et en développant par rapport au petit paramètre ϵ, on obtient une hiérarchie de systèmes d'équations. A l'ordre 1 en ϵ, on obtient

$$\left(\frac{c_m}{c_l}\right)^2 P^0_\tau + U^0_\xi = \frac{3\beta_0\rho_l c_m^2}{p_0} R^0_\tau \tag{2.95}$$

$$U^0_\tau + P^0_\xi = 0 \tag{2.96}$$

Soit en utilisant l'équation (2.90) et la définition de c_m :

$$\begin{aligned} P^0_\tau + U^0_\xi &= 0 \\ U^0_\tau + P^0_\xi &= 0 \end{aligned} \tag{2.97}$$

Cette équation représente des ondes se propageant avec une vitesse adimensionnelle 1, soit une vitesse c_m si l'on revient aux variables initiales, indifféremment dans le sens des x croissants où décroissants. Elle traduit simplement le changement de compressibilité du milieu lié à des bulles qui oscillent de façon quasi-statique. A l'ordre 2 en ϵ, le système d'équations obtenu est

$$\left(\frac{c_m}{c_l}\right)^2 P^1_\tau + U^1_\xi = \frac{3\beta_0\rho_l c_m^2}{p_0}\left(R^1_\tau + 2R^0 R^0_\tau\right)$$

$$U^1_\tau + P^1_\xi = 0$$

En éliminant R^0 et R^1 grâce aux relations (2.90) et (2.92), on obtient après calcul :

$$\begin{aligned} P^1_\tau + U^1_\xi &= C\left((\eta+1)P^0P^0_\tau + \frac{1}{3\eta}M\Omega P^0_{\tau\tau} + \Omega^2 P^0_{\tau\tau\tau}\right) \\ U^1_\tau + P^1_\xi &= 0 \end{aligned} \tag{2.98}$$

où la grandeur C est définie par :

$$C = \frac{\beta_0\rho_l c_m^2}{\eta p_0} = 1 - \left(\frac{c_m}{c_l}\right)^2 \tag{2.99}$$

Si nous ne retenons que les deux premiers termes dans les développements asymptotiques (2.86), et en formant le système $\epsilon(2.97)+\epsilon^2(2.98)$, on voit donc que P^* et U^* vérifient le système, à des termes d'ordre ϵ^3 près :

$$(1-\alpha P^*)P^*_\tau + U^*_\xi = f(P^*_{\tau\tau}, P^*_{\tau\tau\tau}) \tag{2.100}$$

$$U^*_\tau + P^*_\xi = 0 \tag{2.101}$$

avec

$$\alpha = C\frac{\eta+1}{\eta} \tag{2.102}$$

$$f(P^*_{\tau\tau}, P^*_{\tau\tau\tau}) = C\frac{1}{3\eta}\mathcal{M}\mathcal{O}\ P^*_{\tau\tau} + C\mathcal{O}^2\ P^*_{\tau\tau\tau} \tag{2.103}$$

Pour alléger l'écriture, nous omettrons d'écrire les astérisques dans la suite du développement.

2.5.2.5 Cas d'une onde unidirectionnelle

Nous recherchons ici la forme prise par les équations précédentes pour une onde unidirectionnelle se propageant dans le sens des x croissants. La méthode utilisée est inspirée de Whitham (1974).

Pour une onde unidirectionnelle, le système (2.97) se réduit simplement à l'équation :

$$P^0_\tau + P^0_\xi = 0 \qquad \text{et} \quad P^0 = U^0 \tag{2.104}$$

La forme du système à l'ordre suivant (2.98) suggère que P^1 et U^1 sont égaux à un terme correctif près, dépendant de P^0 et de ses dérivées, soit :

$$U^1 = P^1 + Q(P^0, P^0_\xi, P^0_\tau, \dots) \tag{2.105}$$

Reportons cette relation dans le système (2.98) :

$$P^1_\tau + P^1_\xi + Q_\xi = C\left(\frac{\eta+1}{\eta}P^0P^0_\tau + \frac{1}{3\eta}M\Omega P^0_{\tau\tau} + \Omega^2 P^0_{\tau\tau\tau}\right) \tag{2.106}$$

$$P^1_\tau + P^1_\xi + Q_\tau = 0 \tag{2.107}$$

Pour que ces deux équations soient compatibles, Q doit vérifier l'équation

$$Q_\xi - Q_\tau = C\left(\frac{\eta+1}{\eta}P^0P^0_\tau + \frac{1}{3\eta}M\Omega P^0_{\tau\tau} + \Omega^2 P^0_{\tau\tau\tau}\right) \tag{2.108}$$

Mais comme $P^0_\tau = -P^0_\xi$, Q vérifie également cette propriété, et la relation ci-dessus s'écrit donc :

$$2Q_\tau = -C\left(\frac{\eta+1}{\eta}P^0P^0_\tau + \frac{1}{3\eta}M\Omega P^0_{\tau\tau} + \Omega^2 P^0_{\tau\tau\tau}\right)$$

d'où l'on déduit Q par intégration :

$$Q = -\frac{1}{2}C\left(\frac{1}{2}\frac{\eta+1}{\eta}P^{0^2} + \frac{1}{3\eta}M\Omega P^0_\tau + \Omega^2 P^0_{\tau\tau}\right)$$

Dans cette relation, nous sommes libres d'intervertir à volonté dérivées temporelles et spatiales de P^0, en vertu de (2.104), et nous pouvons donc écrire aussi Q sous la forme :

$$Q = -\frac{1}{2}C\left(\frac{1}{2}\frac{\eta+1}{\eta}P^{0^2} - \frac{1}{3\eta}M\Omega P^0_\xi + \Omega^2 P^0_{\xi\xi}\right)$$

En reportant cette valeur dans l'équation (2.107) et en utilisant $Q_\xi = -Q_\tau$, on en déduit l'équation correspondant au système (2.98) pour une onde unidirectionnelle :

$$P^1_\tau + P^1_\xi = -\frac{1}{2}C\left(\frac{\eta+1}{\eta}P^0P^0_\xi - \frac{1}{3\eta}M\Omega P^0_{\xi\xi} + \Omega^2 P^0_{\xi\xi\xi}\right) \tag{2.109}$$

En formant l'équation $\epsilon(2.104)$ $+\epsilon^2(2.109)$, on en déduit que P^* vérifie l'équation, à des termes d'ordre ϵ^3 près :

$$P^*_\tau + P^*_\xi + \frac{1}{2}C\left(\frac{\eta+1}{\eta}P^*P^*_\xi - \frac{1}{3\eta}\mathcal{M}\mathcal{O}P^*_{\xi\xi} + \mathcal{O}^2 P^*_{\xi\xi\xi}\right) \tag{2.110}$$

qui est l'équation de Korteweg-de Vries-Burger, que nous écrivons finalement sous forme canonique :

$$P^*_\tau + (1+\gamma P^*)\,P^*_\xi - \nu P^*_{\xi\xi} + \sigma P^*_{\xi\xi\xi} = 0 \tag{2.111}$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{\eta+1}{\eta}C \qquad \nu = \frac{C}{6\eta}\,\mathcal{M}\mathcal{O} \qquad \sigma = \frac{C}{2}\,\mathcal{O}^2 \tag{2.112}$$

2.5.2.6 Discussion

Si nous négligeons dans un premier temps les termes en $P^*_{\xi\xi}$ et $P^*_{\xi\xi\xi}$, l'équation obtenue est bien de la forme (2.74). Il s'agit bien d'une onde cinématique, et P est alors constante sur les courbes caractéristiques d'équation $d\xi/d\tau = 1 + \gamma P^*$. En revenant aux variables dimensionnelles x et t, la vitesse de propagation s'écrit donc

$$c(P^*) = c_m(1 + \gamma P^*)$$

Si nous évaluons cette vitesse en négligeant la compressibilité du liquide ($c_l = +\infty$ donc $C = 1$), on obtient d'après (2.82) et (2.112)

$$c(P^*) = \left(\frac{\eta p_0}{\beta_0 \rho_l}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\eta + 1}{2\eta} P^*\right)$$

Si nous reprenons l'expression (2.73) de la vitesse de propagation obtenue dans la section 2.5.1, dans laquelle on écrit $p = p_0(1 + P^*)$, on remarque en développant au premier ordre par rapport à P^* que les deux expressions coïncident. Ce résultat est logique puisque nous avions supposé pour obtenir l'expression (2.73) que la pression dans la bulle était égale à la pression à l'infini, ceci revenant à négliger

- l'énergie cinétique du liquide, c'est-à-dire le premier membre de l'équation de Rayleigh, et donc le terme en $P^*_{\xi\xi\xi}$ qui représente la dispersivité du milieu.
- les causes d'amortissement du mouvement de la bulle, soit le terme visqueux dans l'équation de Rayleigh, et donc le terme en $P^*_{\xi\xi}$.

Si nous ajoutons seulement le terme en $P^*_{\xi\xi}$, nous obtenons une équation de Burgers. La présence de ce terme dissipatif sature l'effet de raidissement, et la discontinuité envisagée dans le cadre des ondes cinématiques disparaît : elle est remplacée par un front raide monotone dont l'expression analytique peut être obtenue Whitham (1974).

Si nous considérons maintenant le terme en $P^*_{\xi\xi\xi}$, nous obtenons une équation de Korteweg-de Vries, qui est la forme la plus simple envisageable pour une équation d'onde dispersive non-linéaire. Ce terme caractérise la dispersivité du milieu, et est proportionnel à la dérivée seconde par rapport au temps de l'énergie cinétique du liquide dans son mouvement radial autour de la bulle. Il représente l'impossibilité pour les bulles de répondre instantanément à une perturbation de pression imposée au mélange, à cause de l'inertie du liquide. Son coefficient est proportionnel au rapport ω/ω_0, et à la limite basse fréquence, où la bulle répond instantanément aux variations de pressions à l'infini, ce terme disparaît.

2.5.2.7 Comparaison à des études antérieures

L'équation de KdVB obtenue par van Wijngaarden (1968, 1972) à partir de son modèle de liquide à bulle, est valable pour des transformations isothermes du gaz et un liquide incompressible. Nous avons vérifié qu'en prenant $c_l = +\infty$ et $\eta = 1$ dans notre équation, on retrouve bien les coefficients de l'équation de KdVB obtenue par van Wijngaarden. Ce résultat confirme que les modèles de IKvanW et de Caflish contiennent essentiellement la même physique.

Kuznetsov et al. (1976, 1978) utilisent une équation de KdVB différente de celle de van Wijngaarden, mais nous n'avons pu trouver la référence dans laquelle cette équation est établie, ce qui rend la comparaison difficile.

Notons enfin que Prosperetti (1991) généralise l'équation de KdVB de van Wijngaarden (1972), le terme dissipatif prenant en compte de manière détaillée les effets thermiques dans la bulle. Dans la limite isotherme, ce terme dissipatif est proportionnel à $P^*_{\xi\xi}$ et l'équation de l'auteur est bien une équation de KdVB, avec un coefficient ν différent. Notons que l'approche de Prosperetti (1991) est plus précise que la nôtre, puisqu'elle représente les effets thermiques dans la bulle plus finement que le simple modèle polytropique + viscosité augmentée, utilisé ci-dessus. Cela dit, notre développement à partir du modèle de Caflish pourrait être reconduit en utilisant le même modèle thermique que l'auteur.

2.5.3 Différents types d'ondes non-linéaires.

2.5.3.1 Ondes de chocs dans des liquides à bulles

De nombreux auteurs ont utilisé des tubes à chocs pour étudier la propagation d'ondes de pression unidirectionnelles, ce type d'expérimentation constituant un banc d'essai intéressant pour valider un modèle de liquide à bulles.

Les expériences de Noordzij and van Wijngaarden (1972) ont montré que le profil de pression prend tout d'abord l'allure d'un choc oscillatoire (figure 2.14.a). Cette caractéristique, sur laquelle nous reviendrons dans la section 2.5.3.3, est entièrement explicable par l'information contenue dans le modèle de van Wijngaarden (1968) (ou de Caflish), et résulte d'un équilibre entre non-linéarité, dissipation, et dispersion. Mais les auteurs notent que l'évolution subséquente du choc (figures 2.14.b et c) vers un profil «doux» ne peut être expliqué par cette théorie, et suggèrent que son origine est liée au

mouvement entre les bulles et le liquide. En écrivant un modèle prenant en compte ce phénomène, qu'ils comparent à leurs résultats expérimentaux, les auteurs concluent favorablement quant à leurs hypothèses.

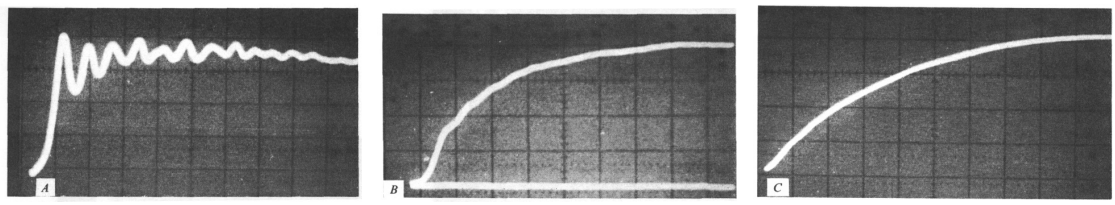


FIGURE 2.14 – D'après Noordzij and van Wijngaarden (1972) : profils de chocs mesurés dans un tube à chocs rempli d'un liquide à bulles. De gauche à droite : profils observés en des points de plus en plus lointains de l'initiation du choc. Le choc oscillatoire initialement formé «relaxe» progressivement vers un profil monotone très peu raide.

Ce phénomène a été réinterprété récemment par Watanabe and Prosperetti (1994), qui montrent que la vitesse relative des deux phases joue en fait un rôle mineur sur la prédiction du profil, et que toute la physique du problème est contenue dans le modèle de Caflish, sous réserve que les effets thermiques dans la bulle soient décrits précisément par le modèle présenté au chapitre 1. Cette étude est donc à la fois une bonne validation du modèle de Caflish et montre de plus que les effets thermiques peuvent jouer un rôle capital sur le phénomène de propagation.

2.5.3.2 Autres formes d'ondes.

Kuznetsov et al. (1978) ont réalisé une série de mesures dans un tube à choc, dans le but de montrer la pertinence d'une représentation des liquides à bulles par une équation de Korteweg-de Vries Burgers. Pour ce faire, les auteurs tentent d'obtenir expérimentalement des solutions classiques de cette équation.

Outre des chocs oscillatoires, tel que celui de la figure 2.14.a, qui comme nous le verrons ci-dessous constituent les solutions «gelées» de l'équation de KdVB, ils obtiennent expérimentalement des solutions en trains d'ondes, ou en trains de solitons. Pour faire varier les coefficients de l'équation de KdVB, les auteurs jouent sur la largeur du pulse de pression incident, ainsi que sur le gaz remplissant les bulles : le terme dissipatif intégrant les effets thermiques dans la bulle, son coefficient varie avec la conductivité thermique du gaz.

Cette étude confirme donc qualitativement la modélisation des liquides à bulles par une équation de KdVB. Malgré tout, la transformation des chocs en profils tels que ceux de des figures 2.14.b et 2.14.c, d'ailleurs non observée par Kuznetsov et al. (1978) ne peut être représentée par cette équation, et nécessite, comme le mentionnent Watanabe and Prosperetti (1994) une représentation exacte des effets thermiques dans la bulle.

Nous nous intéressons ci-dessous aux solutions «gelées» de l'équation de KdVB, c'est-à-dire qui progressent sans se déformer. Ces résultats nous serviront au chapitre 4 pour valider notre code de simulation d'une part, et nous permettront d'autre part d'évaluer numériquement la limite de l'équivalence entre le modèle de Caflish et l'équation de KdVB déterminée ci-dessus.

2.5.3.3 Chocs solutions de l'équation de KdVB

Cherchons les solutions de l'équation de KdVB (2.111) qui progressent à une vitesse constante U (à déterminer) en conservant une forme inchangée. Pour trouver ces dernières, plaçons-nous dans un repère se déplaçant à la vitesse U par le changement de variable $\zeta = \xi - U\tau$: les dérivées temporelles et spatiales s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = -U\frac{\partial}{\partial \zeta} \qquad \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \tag{2.113}$$

et l'équation (2.116) devient alors une équation différentielle par rapport à la variable ζ

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[(1-U)P^* + \frac{\gamma}{2}P^{*^2} + \sigma P^*_{\zeta\zeta} - \nu P^*_\zeta\right] = 0 \tag{2.114}$$

Nous cherchons ensuite s'il existe des solutions où la perturbation s'annule à l'infini, de telle sorte que P^* et ses dérivées s'annulent pour $\zeta \to +\infty$. L'équation ci-dessus s'intègre alors en

$$\sigma P^*_{\zeta\zeta} - \nu P^*_\zeta + (1-U)P^* + \frac{\gamma}{2}P^{*^2} = 0 \tag{2.115}$$

On montre aisément que cela n'est possible que pour $U > 1$, et que P^* tend vers une valeur positive constante p^*_a lorsque $\xi \to -\infty$. Les seules solutions stationnaires de l'équation de KdVB sont donc des chocs de compression. L'équation ci-dessus peut être écrite sous forme canonique :

$$q_{zz} - 2mq_z + q^2 - q = 0 \tag{2.116}$$

avec

$$q = \frac{P^*}{p^*_a} \qquad z = \zeta\sqrt{\frac{\gamma p^*_a}{2\sigma}} \qquad m = \frac{\nu}{2\sqrt{\sigma}}\sqrt{\frac{2}{\gamma p^*_a}} \tag{2.117}$$

Cette équation admet deux points fixes $(0,0)$ et $(1,0)$ correspondant respectivement aux valeurs de la pression en amont et en aval du choc. Le point $(0,0)$ est un point hyperbolique. La structure du choc est donnée par l'orbite hétérocline joignant les deux points fixes, et dépend du paramètre m. Lorsque $m < 1$, le point $(1,0)$ est un foyer, et le choc est oscillatoire ; lorsque $m > 1$, le point $(1,0)$ est un noeud, et le choc présente une structure monotone. Les portraits de phase de l'équation (2.116) et les structures des chocs correspondants sont présentés figure 2.15. La vitesse de propagation U est donnée par

$$U = 1 + \frac{\gamma}{2} p_a^* \tag{2.118}$$

Si les chocs réels dans les liquides à bulles sont bien initialement des chocs oscillatoires (figure 2.14.a), leur évolution vers des profils tels que ceux des figures 2.14.b ou 2.14.c ne peut être traduite par l'équation de KdVB. La perte d'information provient, comme le montrent Watanabe and Prosperetti (1994), de la représentation des effets thermiques par un modèle polytropique. Notons que même la description précise des effets thermiques dans la bulle ne permet pas une comparaison rigoureuse avec les données de Noordzij and van Wijngaarden (1972), et Kameda and Matsumoto (1995) ont montré plus récemment que l'hypothèse monodimensionnelle devait être remise en question.

Cela dit, le développement ci-dessus nous offre une solution quasi-analytique du modèle de Caflish dans un cadre non-linéaire, et nous permettra de valider notre code au chapitre 4.

Avant de clore ce chapitre, nous mentionnons l'existence de modèles de liquides à bulles plus fins disponibles dans la littérature.

2.6 Autres modèles

2.6.1 Prise en compte de la vitesse relative

Dans le cadre strict d'une onde acoustique, la vitesse relative entre le liquide et les bulles joue un rôle négligeable sur la propagation. Nous avions déjà mentionné ce fait comme une conséquence de la faiblesse de la vitesse globale de l'écoulement, inhérente au modèle de Caflish. Les développements théoriques plus récents de Sangani (1991); Zhang and Prosperetti (1994) en apportent une confirmation.

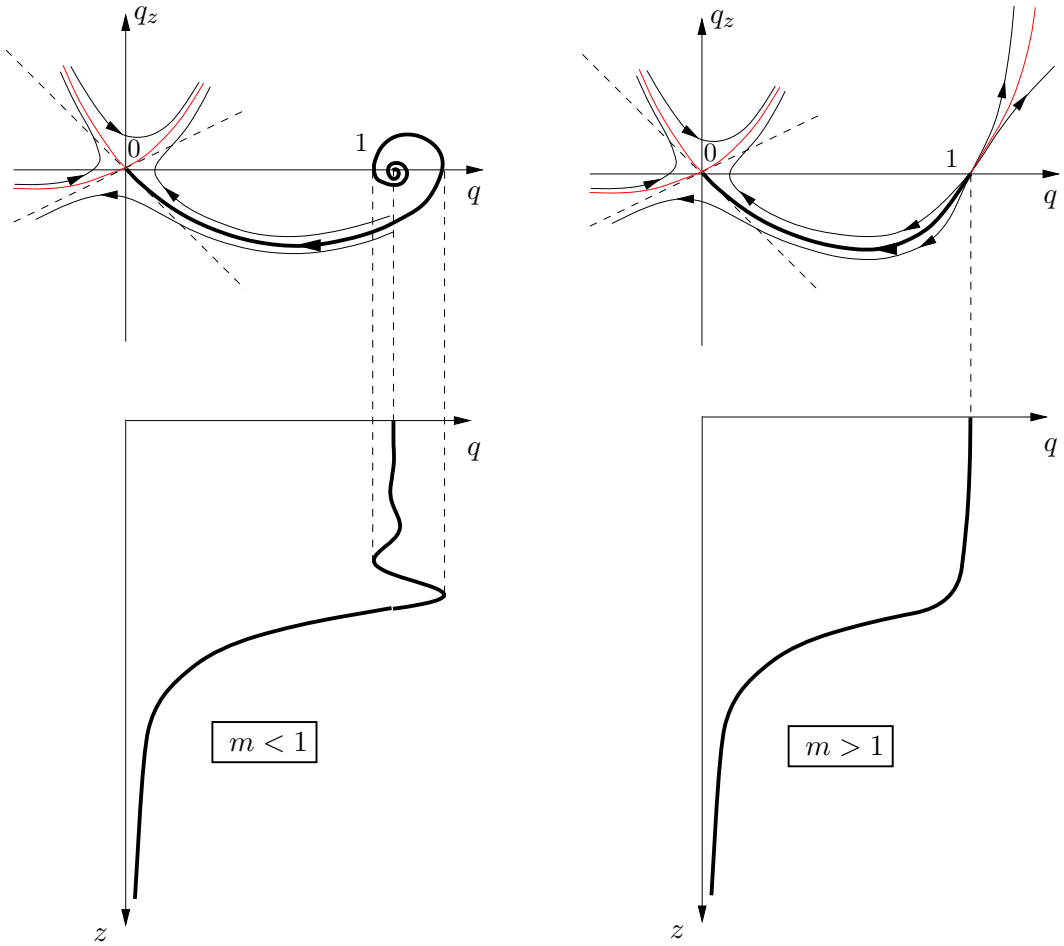


FIGURE 2.15 – Portraits de phase des solutions stationnaires de l'équation de KdVB pour $m < 1$ et pour $m > 1$.

Il n'en est pas de même dans le cas général d'un fluide diphasique en écoulement pour lequel ces effets jouent au contraire un rôle prépondérant et sont responsables notamment de l'apparition «d'ondes de vides» montrées expérimentalement par Bouré and Mercadier (1982). Pour ces dernières la grandeur propagée est non plus la pression, mais la densité de bulles. Physiquement, on conçoit bien que si le milieu est soumis à une accélération, il ne puisse pas se mouvoir «d'un bloc» à partir du moment où les bulles et le liquide ne se déplacent pas à la même vitesse.

Ce phénomène a engendré une littérature théorique abondante sur les liquides à bulles, pour obtenir des modèles rendant compte de de ce type d'onde. Dans cette optique, Biesheuvel and Van Wijngaarden (1984) ont bâti un modèle de liquide à bulles valable à $O(\beta)$ incluant le mouvement relatif entre les deux phases.

Notons enfin que si ce phénomène n'a pas de conséquence appréciable sur le phénomène de propagation dans un liquide à bulles au repos, sa prise en compte est nécessaire pour décrire l'évolution spatiale d'une population de bulles sur des échelles de temps très grandes devant la période acoustique. Ce point sera discuté au chapitre 5.

2.6.2 Interaction entre les bulles Sangani (1991)

Le modèle de Caflish est valable à l'ordre $O(\beta)$, ce qui se traduit par le fait que la relation de dispersion linéaire 2.49 contient un terme correctif en β_0 par rapport à celle du liquide pur. On peut se demander si le modèle est valide pour des taux de gaz plus élevés, et quels sont les principaux phénomènes physiques qui contribueraient aux corrections en β_0 d'ordre supérieur dans la relation de dispersion (2.49).

La réponse correcte à cette question, fournie récemment par Sangani (1991) est : la prise en compte des interactions entre les bulles deux à deux. Si nous revenons sur les méthodes de moyennage d'ensemble décrites précédemment, cette réponse est logique puisqu'un modèle à l'ordre 2 en β peut être obtenu en étudiant l'écoulement autour de deux bulles en milieu infini (figure 2.2.c).

Malgré cette remarque, plusieurs études Cheng et al. (1985) antérieures à Sangani (1991) ont présenté des corrections d'ordre 2 à la relation de dispersion en conservant le plus de termes possibles dans les équations moyennées [12]. Comme le montre simplement Prosperetti (1995), ces corrections sont

12. La relation de dispersion du modèle de van Wijngaarden (1968) contient par exemple

inconsistantes à partir du moment où une équation de dynamique d'une bulle seule en milieu infini (par exemple l'équation de Rayleigh) est utilisée comme fermeture du problème.

Sangani (1991), en utilisant le moyennage d'ensemble de Hinch (1977) a calculé rigoureusement les corrections à la relation de dispersion (2.49) d'ordre supérieur. Les équations de base sont celles de l'acoustique linéaire dans les deux phases avec les conditions de continuité à l'interface. Le mouvement relatif des deux phases, des déformations faibles de l'interface de la bulle, et des interactions de bulles deux-à-deux sont pris en compte.

Le résultat crucial de cette étude est que la première correction à la relation de dispersion est en $O(\beta_0^{3/2})$ et due au fait que chaque bulle oscille non pas dans un liquide de compressibilité c_l, mais dans un milieu de compressibilité équivalente c. Aussi le terme d'amortissement acoustique $2b_a$ donné par (1.85) est-il donné plutôt par $\omega^2 R_0/c = k\omega R_0$ que $\omega^2 R_0/c_l$. La relation de dispersion est donc correctement exprimée par [13]

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2} + \frac{3\beta_0\omega^2}{R_0^2(\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib^*\omega - i\omega^2 R_0 k)} \tag{2.119}$$

où b^* est la somme des seules contributions visqueuses et thermiques à l'amortissement. L'argument développé ici est essentiellement qualitatif, mais basé sur un calcul rigoureux. Considérer que la bulle est entourée par un milieu équivalent au milieu liquide-bulle, c'est en fait déjà prendre en compte approximativement les interactions mutuelles entre deux bulles. En affinant l'étude de ces interactions, Sangani (1991) a déterminé les corrections suivantes en $O(\beta_0 \ln \beta_0)$ et en $O(\beta_0^2)$.

2.6.3 Simulation numérique directe Sangani and Sureshkumar (1993)

La validité de la première correction en $O(\beta_0^{3/2})$ a été examinée par des expériences numériques réalisées par Sangani and Sureshkumar (1993) : les auteurs considèrent une onde incidente plane sur un rideau de bulles d'épaisseur finie dans la direction de propagation, et infinie suivant les deux autres axes. Le rideau de bulles est modélisé par un empilement de cellules cubiques

un terme en β^2 ...

13. En remplaçant dans le dénominateur du terme de droite k par son expression (2.49) et en développant, on voit facilement que cette modification introduit un terme en $O(\beta_0^{3/2})$ dans l'expression de k^2.

toutes identiques, chaque cellule contenant des bulles placées aléatoirement (figure 2.16). La pression en un point du liquide est développée directement comme la somme des ondes linéaires diffractées par toutes les bulles. En identifiant dans cette somme la contribution cohérente à une onde plane, les auteurs obtiennent un nombre d'onde k équivalent dans le rideau.

Notons que cette méthode n'emploie nulle part de prise de moyenne, et prend en compte véritablement la contribution de chaque bulle, la tâche étant rendue possible par l'utilisation de cellules périodiques. Les seules causes d'erreur sont donc liées d'une part à cette hypothèse de périodicité, et d'autre part à la troncature de séries infinies, et les résultats obtenus peuvent donc servir de référence exacte pour étudier la validité d'une relation de dispersion obtenue par une méthode de moyennage.

Les résultats montrent que (comparer les ronds noirs et la courbe en traits pleins sur la figure 2.16)
- la théorie à $O(\beta_0^{3/2})$ est insuffisante pour $\omega/\omega_0 \simeq 1$ à partir de taux de vide de l'ordre de $\beta_0 = 1\%$
- elle est en bon accord avec les simulations pour $\omega/\omega_0 > 2$

Cette étude démontre donc sans ambiguïté que l'affinage de la relation de dispersion pour des taux de vide élevés consiste à prendre en compte les interactions entre les bulles, le terme correctif en $O(\beta_0^{3/2})$ étant suffisant sauf au voisinage immédiat de la résonance.

Malheureusement, en dépit de tous les raffinements introduits dans cette théorie, sa confrontation aux résultats de Silberman échoue quant à l'estimation de l'atténuation au-delà de la résonance : comme le montre la figure 2.16, l'atténuation est encore plus surestimée par la théorie à $O(\beta_0^2)$ que par celle à $O(\beta_0)$! Cette mauvaise corrélation reste à ce jour inexpliquée, et Prosperetti (1995) note que les expériences de Silberman devraient être renouvelées pour clarifier ce point.

2.6.4 Modèle de Zhang and Prosperetti (1994)

Zhang and Prosperetti (1993) ont introduit récemment un nouveau type de moyennage d'ensemble des milieux diphasiques. Son originalité essentielle est d'éviter de considérer la particule comme un milieu continu, et de lui appliquer la loi de la dynamique dans son ensemble. Cette solution est particulièrement intéressante par sa simplicité dans des cas limites fréquents, tels que celui d'une particule solide indéformable, ou bien d'une bulle de masse négligeable.

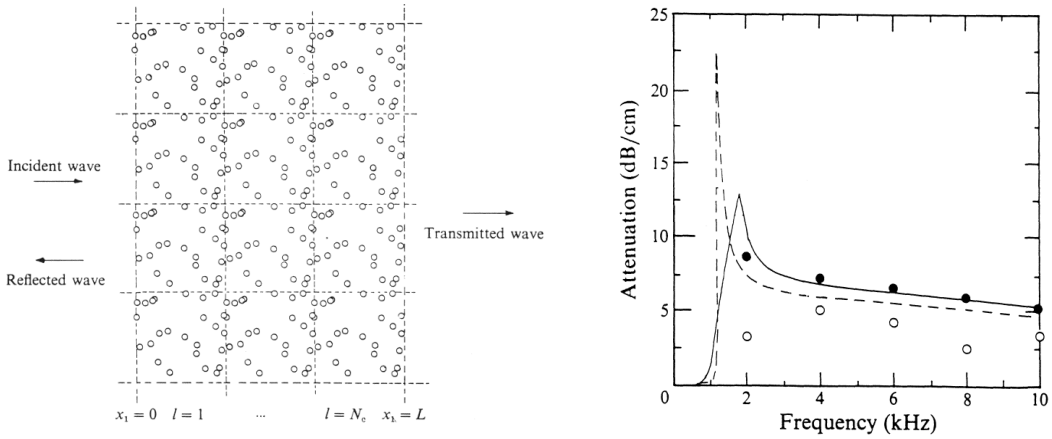


FIGURE 2.16 – D'après Sangani and Sureshkumar (1993). A gauche : modélisation d'un rideau de bulles par un empilement de cellules périodiques. A droite, comparaison de l'atténuation : en ronds blancs, mesurée par Silberman ; en ronds noirs : calculés par simulation directe ; en traits pleins, prédite par la théorie en $O(\beta_0^{3/2})$; en traits pointillés, prédits par la théorie en $O(\beta_0)$. Les données sont $R_0 = 2.60$ mm et $\beta_0 = 1\%$.

Dans ce dernier cas, puisque le volume de la bulle varie au cours du mouvement, la contrepartie est de devoir ajouter les variables rayon instantané et vitesse radiale dans la description d'une configuration $\mathcal{C}_M$ Zhang and Prosperetti (1994). Les auteurs indiquent que ce type de généralisation est envisageable dans de nombreux cas de figure[14].

Le système d'équations obtenu est très complexe, et n'a jamais été utilisé à notre connaissance. Cela dit, tous les modèles antérieurs valables à $O(\beta_0)$ peuvent être retrouvés à partir de celui-ci, et la rigueur de l'approche permet de bien spécifier leurs conditions de validité. Les auteurs montrent en particulier que les équations de Caflish constituent un modèle valable pour un problème de propagation d'ondes acoustiques dans un liquide à bulles au repos. Dans ce cadre, il est montré clairement que la vitesse moyenne $\mathbf{u}$ est de l'ordre de $O(\beta_0)$, et que le mouvement relatif joue un rôle négligeable.

14. Par exemple des particules de forme ellipsoïdales seraient décrites en plus par leurs vitesses angulaires autour des trois axes.

2.7 Conclusion

L'objet de ce chapitre était de trouver dans la littérature un modèle décrivant correctement la propagation d'une onde acoustique dans un liquide à bulles. Le modèle de Caflish et al. (1985) répond à cette demande et concentre l'essentiel de la physique du problème, pourvu que :
– le milieu ne soit pas animé d'un mouvement d'ensemble d'une part,
– la densité de bulles ne soit pas trop élevée.
La première contrainte est vérifiée pour des procédés de type «batch». La seconde peut-être mise en défaut dans des zones où les bulles ont une tendance naturelle à se concentrer (voir chapitre 5). Dans l'étude bibliographique effectuée plus haut, nous avons mentionné l'existence de quelques modèles permettant de relaxer les contraintes décrites ci-dessus.

Sous l'hypothèse de perturbations de faible amplitude, la linéarisation du modèle conduit à une équation particulièrement simple, que l'on peut résumer sous la forme d'une relation de dispersion. Dans une géométrie monodimensionnelle fermée, nous avons précisé les solutions analytiques ce cette équation, qui représentent des ondes stationnaires amorties. Ces résultats serviront de référence pour une comparaison ultérieure avec les résultats non-linéaires. Notons que la relation de dispersion linéaire se généralise facilement à des populations de bulles monodisperses et non uniformes dans l'espace, ce que nous envisagerons au chapitre 5.

Mais dans sa forme originale, le modèle de Caflish est non-linéaire et donc applicable à des perturbations acoustiques d'amplitude élevée. Nous avons analysé physiquement ces non-linéarités, et montré qualitativement qu'à basse fréquence, elles devaient conduire à un raidissement de l'onde. Cet effet non-linéaire est en partie compensé par la dispersion et la dissipation, et cet équilibre entre les trois phénomènes a été montré plus formellement en réduisant le modèle de Caflish à une équation de KdVB.

Pour aller plus loin dans la recherche des solutions du modèle de Caflish, nous décrirons dans le chapitre suivant une méthode numérique susceptible de fournir des solutions pour une population de bulles monodisperse et uniforme dans l'espace. Le code obtenu sera ensuite utilisé au chapitre 4 pour valider les développements analytiques effectués ici, et pour décrire des régimes d'ondes stationnaires non-linéaires.

Notons enfin que nous avons proposé une interprétation énergétique du modèle de Caflish, en mettant l'accent sur la puissance calorifique moyenne dissipée par les bulles. Ce résultat sera également exploité à partir des ré-

sultats de simulation non-linéaires pour localiser les zones de l'espace où les bulles dissipent le maximum d'énergie.

Chapitre 3

Méthode numérique

3.1 Introduction

Si l'on s'interroge sur les particularités de la cavitation acoustique en tant que phénomène de propagation d'onde acoustique, l'une d'entre elles est l'amplitude élevée des oscillations de pression. A ce titre l'hypothèse de perturbations de faible amplitude paraît extrêmement restrictive, et on peut se demander de quelle manière la non-linéarité des oscillations des bulles se répercute sur la forme des ondes propagées.

Il nous a donc paru important de pouvoir déterminer les solutions du modèle de Caflish présenté au chapitre précédent dans un cadre strictement non-linéaire. L'objet du présent chapitre est de présenter une méthode numérique répondant à cette demande.

La résolution numérique du modèle de Caflish proprement dit a été effectuée par Watanabe and Prosperetti (1994) pour l'étude de la propagation des chocs. La méthode employée est une méthode type différences finies dont le détail n'est pas précisé par les auteurs. Toujours dans le cadre des chocs, Matsumoto and Kameda (1993); Kameda and Matsumoto (1995) ont également développé une méthode de différences finies semi-implicite pour résoudre un modèle plus complet prenant en compte le mouvement relatif des deux phases.

Dans le cadre d'une expérience de cavitation acoustique, nous nous intéressons à des géométries fermées, incluant des réflexions de l'onde sur des surfaces solides matérialisant les parois d'un récipient, ou des surfaces libres du type liquide-air ambiant. Plusieurs logiciels de types éléments finis per-

mettent de traiter ce problème dans le cadre de l'acoustique linéaire, avec éventuellement des couplages fluide-structure Decarpigny (1984). Un objectif ambitieux serait donc la réécriture de ce type de code en remplaçant les équations de l'acoustique linéaire par celles de Caflish.

Le code de calcul présenté ci-dessous a été conçu comme un premier pas dans cette voie. Notons que le modèle de Caflish étant non-linéaire, il est moins facilement manipulable que les équations de l'acoustique linéaire, et donc à priori bien plus consommateur de temps calcul.

Pour rendre le problème abordable, deux hypothèses majeures seront faites sur la population de bulles :
– toutes les bulles ont le même rayon d'équilibre R_0.
– elles sont uniformément réparties dans le milieu, avec une densité N.
La restrictivité de ces hypothèses sera rediscutée ultérieurement.

La méthode utilisée est celle des éléments finis, qui permet de transformer le modèle de Caflish en problème semi-discret. Le système d'équations obtenu est donc un système d'équations différentielles, que nous résoudrons par des méthodes classiques.

3.2 Equations de Caflish

3.2.1 Réécriture en potentiel

Rappelons les deux premières équations de Caflish :

$$\frac{1}{\rho_l c_l^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{u} = 4\pi N R^2 \frac{\partial R}{\partial t} \tag{3.1}$$

$$\rho_l \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{grad}\, p = 0 \tag{3.2}$$

Il est possible d'écrire la vitesse $\mathbf{u}$ et la pression p à partir d'un potentiel ϕ, par [1] :

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad}\,\phi \tag{3.3}$$

$$p = -\rho_l \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{3.4}$$

1. Car l'équation (3.2) implique que $\mathbf{rot}\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Dans ces conditions, l'équation (3.1) se réécrit, en fonction de ce potentiel :

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 4\pi N R^2 \frac{\partial R}{\partial t} \tag{3.5}$$

Cette équation doit être couplée avec une équation de dynamique de bulle. L'équation utilisée dans les simulations présentées est l'équation de Rayleigh, mais toute autre équation peut être utilisée. Toutes les équations de bulle font intervenir les dérivées temporelles du rayon de la bulle, la pression moyenne dans le milieu diphasique, et éventuellement sa dérivée temporelle, ainsi que la pression dans le gaz ; nous écrirons donc l'équation de bulle sous la forme générique :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = F\left(R, \frac{\partial R}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, p_g\right) \tag{3.6}$$

Nous avons vu que la pression dans le gaz pouvait être écrite ou bien directement en fonction de R pour un modèle polytropique, ou bien sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles si l'on détaille les effets thermiques dans la bulle. Dans ce dernier cas, grâce à la méthode spectrale détaillée au chapitre 1, le système peut être réduit à un systèmes d'équations différentielles, ces dernières s'ajoutant alors à l'équation de bulle.

Pour simplifier l'exposé, nous supprimerons donc jusqu'à nouvel ordre la pression p_g de l'expression (3.6), sous entendant l'emploi d'un modèle polytropique.

3.2.2 Adimensionalisation

L'adimensionalisation utilisée est la suivante :

$$x = Lx^* \qquad t = Kt^*/\omega \tag{3.7}$$

$$p = p_0 p^* \qquad \mathbf{u} = \beta_0 c \mathbf{u}^* \qquad R = R_0 R^* \tag{3.8}$$

Les choix effectués pour t et $\mathbf{u}$ méritent quelques explications. Nous avons ajouté une constante K pour l'adimensionalisation de t pour nous laisser la possibilité d'utiliser par la suite le changement de variables préconisé par Lauterborn and Parlitz (1988) défini au chapitre 1 par les équations (1.92), pour «adoucir» la dynamique de l'équation de bulle. La constante K correspond donc à l'expression $1/EB$ dans ces équations.

Par ailleurs, nous avons vu au chapitre 2 que la vitesse $\mathbf{u}$ était d'ordre $\beta_0 c$, où c est la célérité du son effective dans le milieu. Il est donc logique de

rapporter l'amplitude de $\mathbf{u}$ à cette grandeur, c pouvant être calculée à partir de la relation de dispersion.

L'adimensionalisation de ϕ est obtenue d'après la définition (3.3), soit

$$\phi = \beta_0 c L \phi^* \tag{3.9}$$

En omettant d'écrire les astérisques, on obtient donc l'équation adimensionnelle sous la forme

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha_l^2 \nabla^2 \phi + 3\alpha \; R^2 \frac{\partial R}{\partial t} = 0 \tag{3.10}$$

avec

$$\alpha_l = \frac{KC_l}{\omega L} \qquad \alpha = \frac{c_l}{c}\alpha_l \tag{3.11}$$

3.3 Méthode des résidus pondérés

Nous donnons dans cette section une formulation intégrale de l'équation (3.10). Considérons tout d'abord les conditions aux limites du problème.

3.3.1 Conditions aux limites

On suppose le milieu contenu dans un volume V fermé par une surface A. Cette dernière peut être décomposée en deux parties (figure 3.1)

– une surface A_u où la vitesse normale est imposée (condition de Neuman)

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = U_0(\mathbf{x}, t) \tag{3.12}$$

– une surface A_ϕ où le potentiel ϕ est imposé (condition de Dirichlet)

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0(\mathbf{x}, t) \tag{3.13}$$

En fait, on impose plutôt la pression (par exemple nulle sur une paroi molle ou sinusoïdale pour la source) que le potentiel, mais la définition (3.4) permet de passer de l'une à l'autre des conditions.

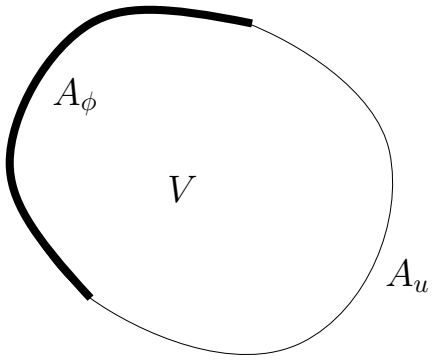


FIGURE 3.1 – Frontière du volume V. Le potentiel est imposé sur A_ϕ et la vitesse normale sur A_u

3.3.2 Formulation intégrale

Pour la solution exacte du système (ϕ, R), le premier membre de l'équation (3.10) doit être nul en tout point. Pour une solution approchée, ce premier membre représente l'erreur effectuée, et à ce titre est appelé résidu. La méthode des résidus pondérés consiste à trouver une solution approchée de (ϕ, R) qui annule une moyenne pondérée de ces résidus sur tout le domaine V.

Si ψ est une fonction poids positive (à définir), on remplacera donc l'équation locale (3.10) par l'équation moyenne

$$\int_V \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha_l^2 \nabla^2 \phi + 3\alpha \, R^2 \frac{\partial R}{\partial t} \right] \psi \, dV = 0 \tag{3.14}$$

Remarquons que dans la mesure où il y a ici deux fonctions inconnues ϕ et R, il faudrait aussi former un résidu associé à la deuxième équation (3.6). Cependant, cette dernière étant une équation différentielle ordinaire (sans dérivée spatiale), nous la conservons ici sous forme locale.

La clé de la méthode consiste ensuite à effectuer une intégration par parties du deuxième terme de (3.14). On peut écrire

$$\int_V \nabla^2 \phi \, \psi \, dV = - \int_V \mathbf{grad}\, \phi . \mathbf{grad}\, \psi \, dV + \oint_A \mathbf{grad}\, \phi . \mathbf{n} \, \psi \, dA \tag{3.15}$$

On impose à la fonction poids ψ de s'annuler sur la surface A_ϕ ; nous verrons que ce choix est justifié lorsque nous préciserons la forme de ces fonctions-

poids. L'intégrale de surface intervenant dans (3.15) s'écrit alors simplement

$$\oint_A \mathbf{grad}\,\phi.\mathbf{n}\ \psi\ dA = \oint_{A_u} U_0\ \psi\ dA \tag{3.16}$$

et l'équation aux résidus s'écrit donc finalement

$$\int_V \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\psi\ dV + \alpha_l^2 \int_V \mathbf{grad}\,\phi.\,\mathbf{grad}\,\psi\ dV + 3\alpha \int_V R^2 \frac{\partial R}{\partial t}\psi\ dV = \alpha_l^2 \oint_{A_u} U_0\ \psi\ dA \tag{3.17}$$

3.4 Approximation aux éléments finis

3.4.1 Interpolation polynômiale par morceaux

Pour exploiter cette équation, il faut maintenant tenter d'approcher les fonctions $\phi(\mathbf{x}, t)$ et $R(\mathbf{x}, t)$ par des fonctions d'une forme particulière. Pour cela on découpe le domaine V en polyèdres, appelés éléments, ne se recouvrant pas.

Les arêtes de ces polyèdres doivent de plus se couper obligatoirement en leurs sommets. Ces derniers sont appelés noeuds du maillage et peuvent être décomposés en 3 familles :

- Les noeuds intérieurs aux volume V, qui n'appartiennent pas à la frontière A
- Les noeuds appartenant à A_ϕ où le potentiel (la pression) est imposé
- Les noeuds appartenant a A_u où la vitesse normale est imposée

On notera n_n le nombre total de noeuds, n_e le nombre d'éléments, et respectivement n_v, n_ϕ et n_u les nombres de noeuds dans chacune des trois familles ci-dessus.

On note $\phi_j(t)$ et $R_j(t)$ les valeurs (inconnues) prises par les fonctions ϕ et R aux noeuds du maillage, et on cherche ϕ et R sous la forme d'interpolations polynômiales par morceaux, soit

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j=1}^{n_n} N_j(\mathbf{x})\phi_j(t) \\ R(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j=1}^{n_n} N_j(\mathbf{x})R_j(t) \end{aligned} \tag{3.18}$$

où la restriction des N_j à chaque élément est un polynôme. Ecrivons que $\phi(\mathbf{x_j}, t) = \phi_j(t)$

$$\sum_{j=1}^{m} N_j(\mathbf{x_j})\phi_j(t) = \phi_j(t) \qquad j = 1 \ldots n_n \tag{3.19}$$

On voit qu'une solution évidente est donnée par $N_j(\mathbf{x_j}) = \delta_{ij}$. Il faut donc construire n_n fonctions N_j polynômiales par morceaux, nulles en tout noeud du maillage sauf le noeud i. La figure 3.2 montre la forme des fonctions N_j pour un maillage 1D avec des polynômes de degré 1 et la figure 3.3 pour un maillage 2D triangulaire et des polynômes de degré 1.

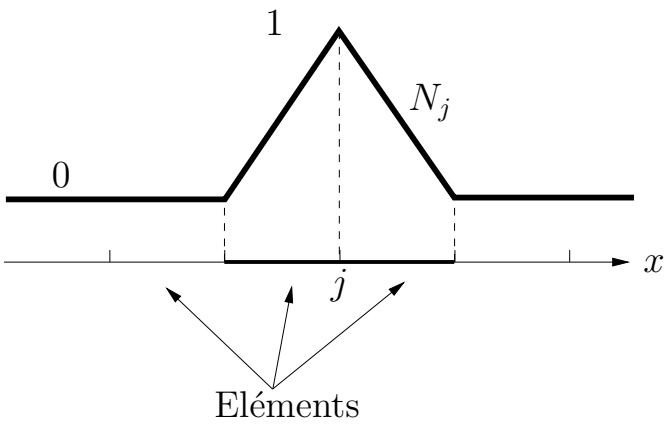


FIGURE 3.2 – Définition des fonctions polynômiales par morceaux N_j en 1D avec des polynômes de degré 1.

De manière générale, les fonctions N_j obtenues dépendent de la forme des éléments et du degré recherché pour le polynôme. Par exemple en 2D pour des éléments triangulaires, on peut trouver des polynômes de degré 1 ; par contre, pour des éléments quadrilatères, on trouvera des polynômes de degré au moins 2. Notons que de manière générale, si l'on veut obtenir des interpolations de degré élevé, on devra ajouter des noeuds autres que les sommets des éléments. Ces derniers sont appelés noeuds milieux.

Une fois le maillage et les fonctions polynômiales choisies, les dérivées spatiales et temporelles de $\phi(\mathbf{x}, t)$ et $R(\mathbf{x}, t)$ se déduisent facilement des expressions (3.18). Par ailleurs la vitesse imposée à la frontière $U_0(\mathbf{x})$, peut être exprimée également en fonction des valeurs nodales imposées U_{0_k} sur les

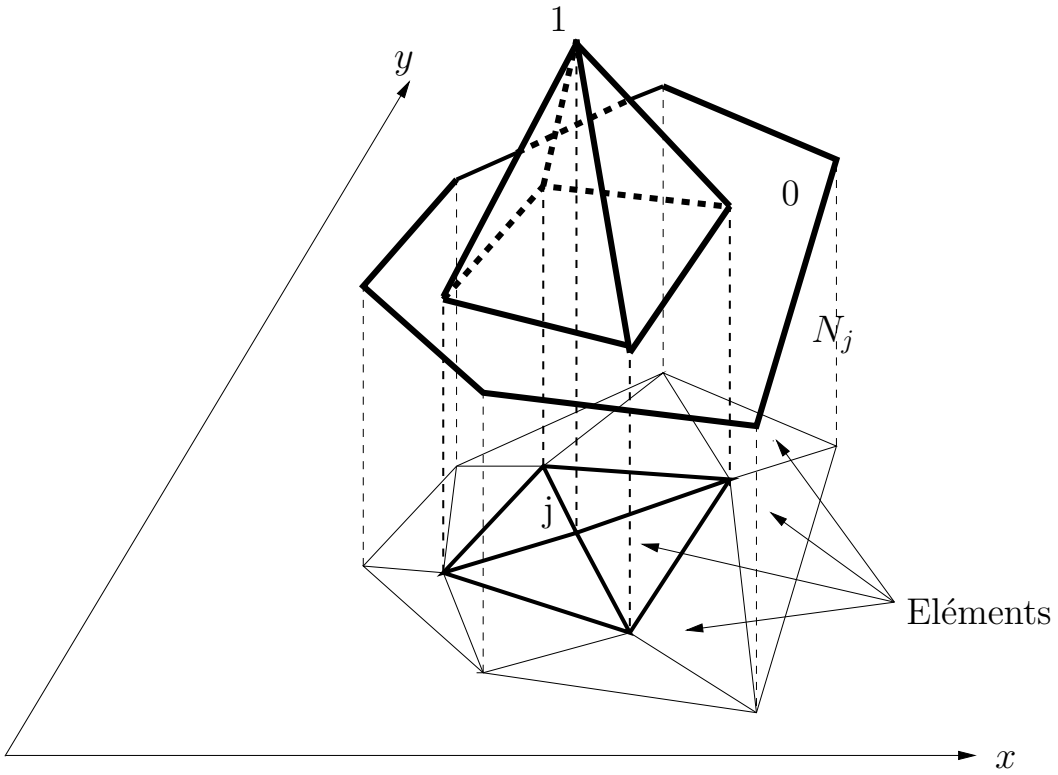


FIGURE 3.3 – Définition des fonctions polynômiales par morceaux N_j en 2D pour un maillage triangulaire avec des polynômes de degré 2.

noeuds de A_u :

$$U_0(\mathbf{x},t) = \sum_{k\in A_u} N_k(\mathbf{x}) U_{0_k}(t) \tag{3.20}$$

L'équation aux résidus discrétisée s'écrit donc finalement, en fonction des valeurs nodales $\phi_j(t)$ et $R_j(t)$ et de leurs dérivées temporelles (on omettra d'indiquer les dépendances par rapport à $\mathbf{x}$ et t pour alléger l'écriture).

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n_n} \ddot{\phi}_j \int_V N_j \psi \, dV + \alpha_l^2 \sum_{j=1}^{n_n} \phi_j \int_V \mathbf{grad}\, N_j . \mathbf{grad}\, \psi \, dV \\ + 3\alpha \sum_{j=1}^{n_n} \dot{R}_j \int_V \left(\sum_{j=1}^{n_n} N_j R_j \right)^2 N_j \psi \, dV = \alpha_l^2 \sum_{k\in A_u} U_{0_k} \oint_{A_u} N_k \, \psi \, dA\end{aligned} \tag{3.21}$$

3.4.2 Choix des fonctions poids

Nous spécifions maintenant les fonctions-poids ψ. Les inconnues du problème sont

- les $n_n - n_\phi$ potentiels ϕ_j en tous les noeuds sauf ceux de la surface A_ϕ où ϕ est imposé, donc connu.
- les n_n rayons R_j.

L'écriture de l'équation de dynamique de bulle en chaque noeud fournit n_n équations. Les équations manquantes doivent être fournies par la formulation intégrale (3.21) exprimée pour $n_n - n_\phi$ fonctions poids ψ différentes. Rappelons que la contrainte pour ces fonctions est qu'elles soient positives et s'annulent sur A_ϕ.

La méthode des éléments finis consiste à prendre les $n_n - n_\phi$ fonctions N_j associées aux noeuds n'appartenant pas à A_ϕ, qui par construction s'annulent bien sur cette surface. Si l'on suppose pour simplifier que les noeuds de A_ϕ sont les n_ϕ derniers, on obtient les $n_n - n_\phi$ équations

$$\sum_{j=1}^{n_n} \mathcal{M}_{ij}\ddot{\phi}_j + \sum_{j=1}^{n_n} \mathcal{K}_{ij}\phi_j + \sum_{j=1}^{n_n} \mathcal{T}_{ij}(R_k)\dot{R}_j = \mathcal{U}_i \quad i = 1 \dots n_n - n_\phi \tag{3.22}$$

avec

$$\mathcal{M}_{ij} = \int_V N_i N_j \, dV \tag{3.23}$$

$$\mathcal{K}_{ij} = \alpha_l^2 \int_V \mathbf{grad}\, N_i . \mathbf{grad}\, N_j \, dV \tag{3.24}$$

$$\mathcal{T}_{ij} = 3\alpha \int_V \left(\sum_{j=1}^{n_n} N_j R_j \right)^2 N_i N_j \, dV \tag{3.25}$$

$$\mathcal{U}_i = \sum_{k \in A_u} U_{0_k} \oint_{A_u} U_0 \; N_i N_k \, dA \tag{3.26}$$

Sachant que les $n_n - n_\phi$ derniers potentiels sont imposés, on peut les faire passer au second membre, et le système précédent s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n_n - n_\phi} \mathcal{M}_{ij}\ddot{\phi}_j + \sum_{j=1}^{n_n - n_\phi} \mathcal{K}_{ij}\phi_j + \sum_{j=1}^{n_n} \mathcal{T}_{ij}(R_k)\dot{R}_j = \mathcal{U}_i + \mathcal{P}_i \quad i = 1 \dots n_n - n_\phi \tag{3.27}$$

avec

$$\mathcal{P}_i = - \sum_{j=n_n - n_\phi + 1}^{n_n} \mathcal{M}_{ij}\ddot{\phi}_j - \sum_{j=n_n - n_\phi + 1}^{n_n} \mathcal{K}_{ij}\phi_j \tag{3.28}$$

Désignons le vecteur des potentiels nodaux inconnus par $[\phi]$ (de dimension $n_n - n_\phi$) et celui des rayons de bulle par $[R]$ (de dimension n_n). Le système ci-dessus peut alors s'écrire matriciellement :

$$[\mathcal{M}][\ddot{\phi}] + [\mathcal{K}][\phi] + [\mathcal{T}([R])]\,[\dot{R}] = [\mathcal{U}] + [\mathcal{P}] \tag{3.29}$$

Il s'agit d'un système différentiel non-linéaire de $n_n - n_\phi$ équations du deuxième ordre. Le premier membre représente la dynamique propre du système liquide-bulles, et le second membre son excitation, $[\mathcal{U}]$ correspondant à une excitation en vitesse, et $[\mathcal{P}]$ en pression. Les deux premiers termes du premier membre correspondent au problème d'acoustique linéaire classique, et la non-linéarité $\partial\beta/\partial t$ du modèle de Caflish liée à la présence des bulles se retrouve dans le troisième terme. La matrice $[\mathcal{T}]$ dépend des valeurs instantanées des rayons nodaux.

Notons que les matrices $[\mathcal{M}]$, $[\mathcal{K}]$, et $[\mathcal{T}]$ comportent un grand nombre de zéros, et leur construction effective à partir des données du maillage, appelée assemblage, est un problème classique. Dans le cas d'une géométrie mono-dimensionnelle, auquel nous nous limiterons dans la suite, ces matrices sont multidiagonales, le nombre de diagonales étant fixé par l'ordre des polynômes d'interpolation.

3.5 Résolution

Le système (3.29) doit être complété par n_n équations de dynamique de bulle exprimées en chaque noeud i

$$\ddot{R}_i = F\left(R_i, \dot{R}_i, \dot{\phi}_i, \ddot{\phi}_i, p_{g_i}\right) \tag{3.30}$$

chaque équation étant éventuellement complétée par les équations différentielles résultant de l'emploi d'une méthode spectrale pour résoudre les équations de transfert thermique dans la bulle.

Pour résoudre le système (3.29)-(3.30), le système est transformé en un système d'équations du premier ordre, et résolu ensuite par une méthode de type Adams. Un point délicat de la résolution est la prémultiplication de $[\ddot{\phi}]$ par la matrice $[\mathcal{M}]$ qui interdit l'écriture du système différentiel sous la forme canonique $[\dot{Y}] = f([Y], t)$. Cette caractéristique nécessite l'inversion du système $[\mathcal{M}][\ddot{\phi}] = \ldots$ à chaque pas, ce qui consomme bien sûr du temps calcul.

Par ailleurs, il est nécessaire de recalculer et de réassembler la matrice $\mathcal{T}$ à chaque pas de temps, celle-ci dépendant des valeurs nodales R_i, ce qui conduit également à une consommation importante de temps calcul. Les grandeurs issues de la résolution de ce système différentiel sont, en chaque noeud i :

- les potentiels $\phi_i(t)$
- leurs dérivées $\dot{\phi}_i(t)$ et donc les pressions $p_i(t)$
- les rayons $R_i(t)$
- les vitesses radiales $\dot{R}_i(t)$
- dans le cas où l'on utilise un modèle thermique complet, les pressions dans les bulles $p_{g_i}(t)$ ainsi que les différents coefficients de Chebychev permettant de calculer les températures en tout point à l'intérieur des bulles.

Des conditions initiales doivent être définies pour le système d'équations différentielles. L'approche la plus logique est de considérer que le milieu est initialement au repos, les bulles ayant toutes leur rayon d'équilibre. Dans ces conditions, la simulation doit être poussée suffisamment loin pour laisser le temps à l'onde stationnaire de se former et se stabiliser.

3.6 Conclusion

La méthode numérique présentée dans ce chapitre permet théoriquement de résoudre les équations de Caflish dans toute géométrie fermée, contenant un liquide et des bulles toutes identiques et uniformément réparties dans le milieu.

Notons que la méthode est indépendante de l'équation de dynamique de bulle utilisée, celle-ci étant écrite individuellement en chaque noeud du maillage. Il est ainsi possible de prendre en compte des équations très complètes, notamment au niveau de la description des effets thermiques dans la bulle. A ce titre les équations décrites au chapitre 1 peuvent être utilisées, au prix de l'ajout de variables nodales.

Dans le cadre de cette étude, la méthode n'a été implémentée que dans des géométries monodimensionnelles, comme nous le justifions à la fin du chapitre suivant. Pour cette raison, nous n'avons pas détaillé les problèmes de maillage, numérotation des noeuds, et assemblage des matrices, intervenant classiquement dans les problèmes d'éléments finis.

Chapitre 4

Ondes non-linéaires obtenues par simulation numérique

4.1 Introduction

4.1.1 Approche envisagée

Nous cherchons dans ce chapitre à mettre en évidence l'influence de la non-linéarité du modèle de Caflish sur un problème de propagation d'ondes, en montrant les différences obtenues par rapport aux résultats linéaires.

Dans cette optique, nous nous sommes cantonnés dans cette étude à des géométries monodimensionnelles, décrites au chapitre 2 par la figure (2.7) : un «tube», fermé à une extrémité par l'émetteur acoustique, et à l'autre par un réflecteur, que nous supposerons ici parfait. Il s'agit donc à priori d'un problème d'ondes stationnaires, et le code présenté au chapitre précédent a été écrit dans cette optique.

Cela dit, il est plus facile de caractériser une onde unidirectionnelle [1], et comme nous l'avons vu dans la section 2.5, un certain nombre de résultats analytiques peuvent être utilisés pour décrire la propagation d'une telle onde. Nous utiliserons donc dans un premier temps notre code pour vérifier ces résultats, en qualifiant notamment la réduction du modèle de Caflish à une équation de KdVB dans le domaine des basses fréquences.

1. Nous utilisons indifféremment les terminologies «ondes progressives» ou «ondes unidirectionnelles» pour caractériser l'absence d'onde réfléchie.

Nous nous intéresserons ensuite aux régimes d'ondes stationnaires proprement dits, dans plusieurs domaines fréquentiels. Les solutions seront systématiquement comparées aux solutions fournies par la théorie linéaire.

4.1.2 Choix des paramètres

Nous considérerons des bulles d'air dans l'eau, soit : $c_l = 1500$ m/s, $\rho_l = 998$ kg/m^3, $\sigma = 7.25.10^{-2}$ N.m^{-1}, $\mu = 10^{-3}$ kg.m^{-1}s^{-1}, $\gamma = 7/5$. La température du liquide est $T = 298$ K, et la conductivité thermique de l'air est donnée en fonction de la température par $\lambda(T) = AT + B$ avec $A = 5.528.10^{-5}$ W.m^{-1}.K^{-2} et $B = 1165.10^{-5}$ W.m^{-1}.K^{-1}. La pression hydrostatique vaut $p_0 = 101300$ Pa.

Le problème est alors entièrement défini par la donnée des paramètres :
- β_0 taux volumique de gaz
- R_0 rayon d'équilibre des bulles
- L longueur du domaine
- f fréquence de la source
- p_a ou u_a amplitudes de pression ou de vitesse imposée par la source.

La stratégie envisagée pour le choix de ces paramètres sera différente selon que nous nous intéressons à des ondes progressives ou des ondes stationnaires.

Dans les deux cas, l'amplitude de la source sera graduellement augmentée pour faire apparaître des phénomènes non-linéaires. Nous avons choisi arbitrairement une excitation en pression, dont l'amplitude rapportée à la pression hydrostatique p_0 est plus parlante qu'une vitesse.

Sauf mention contraire, la pression imposée par la source sera sinusoïdale d'amplitude adimensionnelle p_a^*, soit :

$$p(0,t) = p_0(1 - p_a^* \sin \omega t) \tag{4.1}$$

4.2 Ondes progressives

Comme nous l'avons vu dans la section 2.5.1, l'effet majeur de la non-linéarité du problème pour des fréquences basses est un raidissement de la partie compressive de l'onde.

Cet effet non-linéaire est équilibré par la dispersion et la dissipation, cet équilibre pouvant être modélisé dans une certaine mesure par l'équation de KdVB obtenue dans la section 2.5.2. Une conséquence de cet équilibre se concrétise par l'existence possible de chocs progressant indéformés à vitesse constante.

Nous nous proposons dans un premier temps de vérifier ces différentes propriétés en utilisant le code décrit au chapitre précédent. Pour représenter des ondes unidirectionnelles, nous utiliserons notre code entre le moment où la source commence à émettre, et celui où le front d'onde arrive sur le réflecteur. Cet instant peut être retardé artificiellement en augmentant la longueur L du domaine, au prix bien sûr d'un nombre d'éléments plus important dans le maillage. Notons que la condition de réflexion est toujours présente, mais n'intervient pas tant que le front de l'onde n'y est pas parvenu.

4.2.1 Raidissement non-linéaire.

Dans une première approche purement qualitative, nous considérons un domaine de longueur $L = 6.17$ cm excité par une source de fréquence $f = 20$ kHz et d'amplitude $p_a^* = 0.2$. Le taux de vide est fixé arbitrairement à 5.10^{-4} et le rayon des bulles à 10μm. Dans ces conditions, le rapport de la fréquence acoustique à la fréquence propre des bulles est de l'ordre de 0.072, et nous sommes bien dans l'hypothèse basse fréquence envisagée dans la section 2.5. Nous envisagerons ensuite des variations judicieuses de ces paramètres dictées par les résultats analytiques de la section 2.5.2.

La figure 4.1 montre le profil d'onde obtenu à trois instants différents : il apparaît que le front d'onde se raidit dans la phase de compression, et se transforme très rapidement en un profil approximativement triangulaire. Qualitativement, ce profil est très semblable à celui de la figure 2.13, si l'on ne tient pas compte de la suroscillation observable sur la crête du front raide.

Pour aller plus loin dans la comparaison avec les résultats intuitifs de la section 2.5.1.2, il est intéressant de représenter les résultats de simulation de la figure 4.1 sous forme caractéristique, en traçant les courbes $p = C^{\text{te}}$ dans le plan (x, t) (figure 4.2).

Nous voyons que, à quelques «accidents» près, les courbes obtenues numériquement sont des droites très semblables à celles de la figure 2.12, ce qui

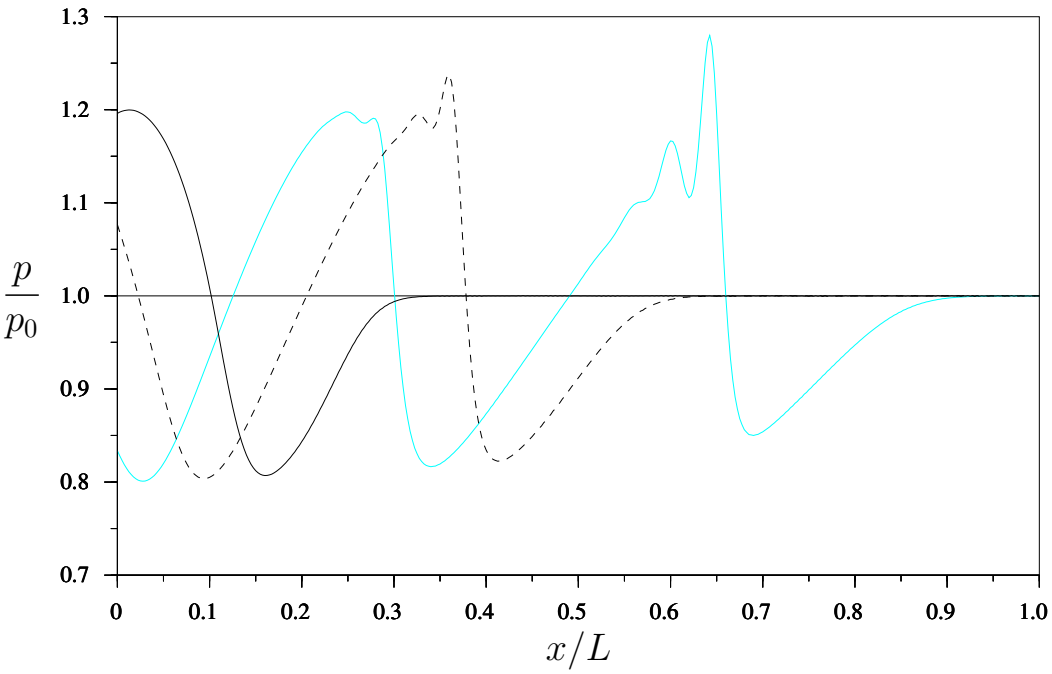


FIGURE 4.1 – Propagation de l'onde pendant les premières périodes acoustiques. $L = 6.17$ cm et $p_a^* = 0.2$. Le profil est représenté aux instants $ft = 0.78125$ (traits noirs), $ft = 1.5625$ (traits pointillés), et $ft = 2.34375$ (traits gris).

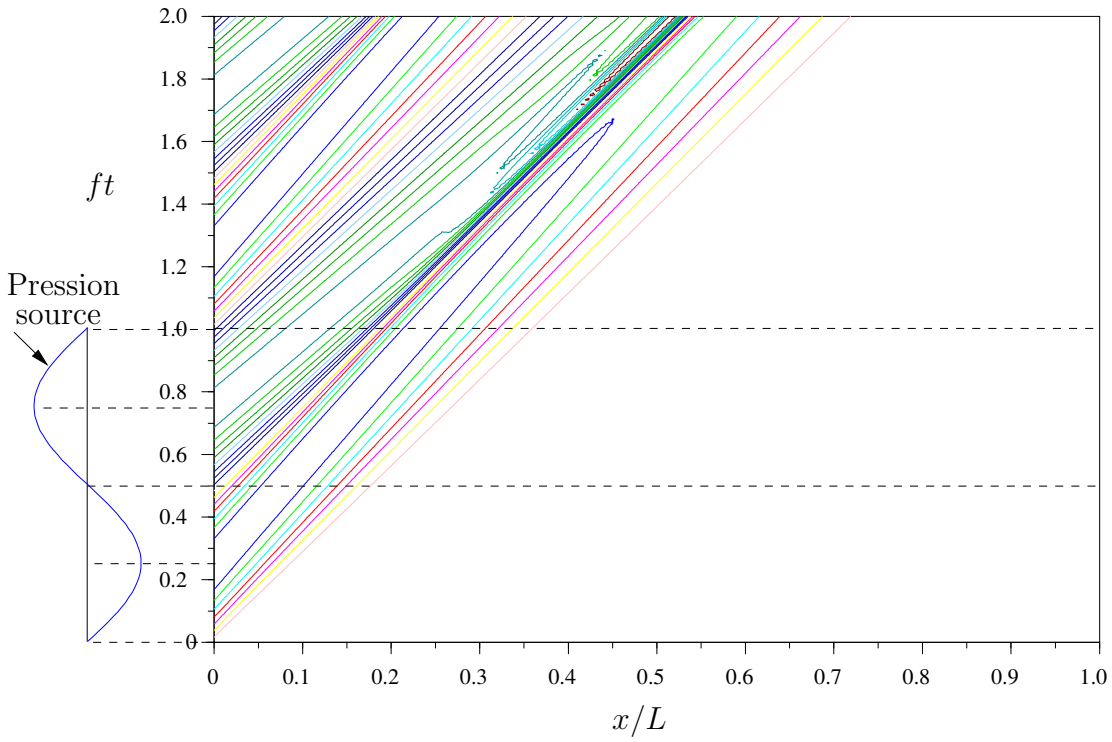


FIGURE 4.2 – Courbes caractéristiques pour l'onde de la figure 4.1 : ce sont des droites dont la pente est inversement proportionnelle à la pression.

indique que nous avons approximativement une onde cinématique. La pente de ces droites est d'autant plus importante que la valeur de la pression associée est faible, ce qui confirme que la vitesse de propagation augmente avec la pression.

Les suroscillations visibles sur la crête du choc, responsables des «accidents» sur les caractéristiques de la figure 4.2, sont liées à la dispersion. Physiquement, elles peuvent être interprétées de la manière suivante : une fois le choc formé, celui-ci agit comme un échelon de pression sur le milieu au repos en amont du choc. Les bulles ainsi soumises à cet échelon de pression effectuent quelques oscillations à leur fréquence propre, ces oscillations étant amorties par les différentes causes d'amortissement étudiées au chapitre 1. Les bulles ne peuvent suivre instantanément la compression imposée par le choc, à cause de l'inertie du liquide environnant, qui nous l'avons vu, est responsable du caractère dispersif du milieu.

Il est instructif de visualiser l'évolution de l'onde sur une durée plus grande, pour différentes amplitudes de la source (figure 4.3). On voit que pour des

amplitudes croissantes, la distorsion de l'onde s'effectue sur des distances de plus en plus courtes, et s'accompagne d'un amortissement croissant.

Cette constatation est intéressante, car elle montre que l'amortissement spatial d'une onde dans les liquides à bulles augmente avec l'amplitude de cette onde, et que le phénomène est lié à la non-linéarité du milieu.

A ce stade, nous avons donc confirmé qualitativement les prédictions de la section 2.5.1.2. Les ondes progressives obtenues à basse fréquence sont approximativement des ondes cinématiques, aux termes de dispersion et de dissipation près. Puisque ces derniers ont été calculés analytiquement en ré-

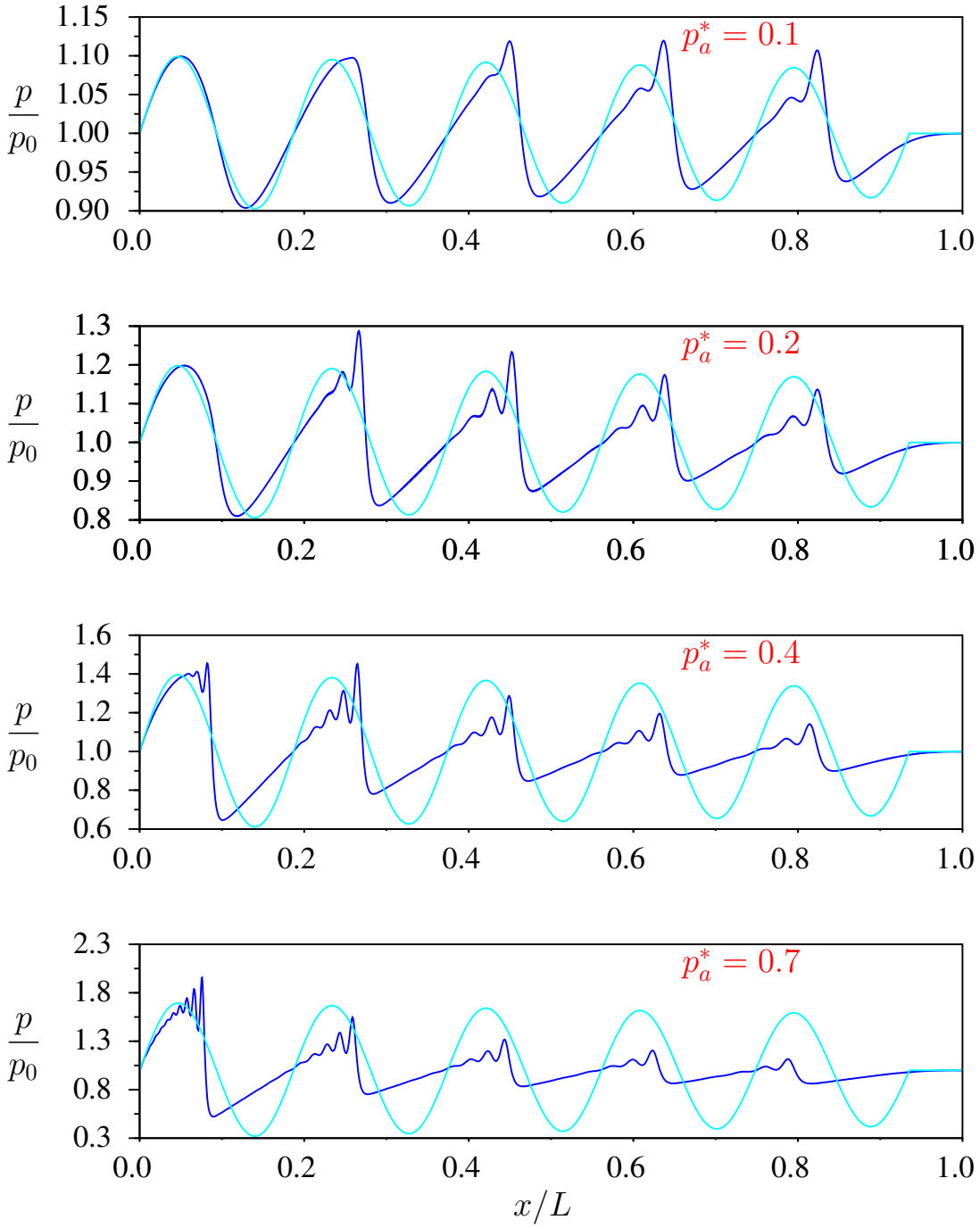


FIGURE 4.3 – Evolution d'une onde progressive pour différentes amplitudes de la source dans les conditions de la figure 4.1. Les profils sont visualisés au bout de 5 périodes de la source. La longueur du domaine est 12 cm. Les courbes en gris représentent les ondes prédites par la théorie linéaire.

duisant le modèle de Caflish, nous nous attachons maintenant à tester la validité de cette réduction par simulation.

4.2.2 Validité de la réduction à l'équation de KdVB.

4.2.2.1 Principe

Les chocs sont les solutions de l'équation de KdVB que nous connaissons le mieux analytiquement, le problème se ramenant alors à la résolution d'une équation différentielle (voir section 2.5.3.3). Ces solutions constituent ainsi l'outil de comparaison idéal pour tester la validité de la réduction. Nous allons donc rechercher numériquement des solutions du modèle de Caflish en forme de chocs, et les comparer aux solutions analytiques de l'équation de KdVB.

4.2.2.2 Rappel

Nous avons dans la section (2.5.2) que dans la limite des basses fréquences, le modèle de Caflish pouvait être réduit à l'équation :

$$P^*_\tau + (1 + \gamma P^*)\, P^*_\xi - \nu P^*_{\xi\xi} + \sigma P^*_{\xi\xi\xi} = 0 \tag{4.2}$$

avec

$$\tau = \omega t \qquad \xi = \frac{\omega}{c_m} x \qquad P^* = \frac{p - p_0}{p_0} \tag{4.3}$$

c_m étant la vitesse de phase à fréquence nulle. Les solutions «gelées» de cette équation sont des chocs dont la structure est donnée par les solutions de l'équation différentielle :

$$q_{zz} - 2mq_z + q^2 - q = 0 \tag{4.4}$$

avec

$$q = \frac{P^*}{p^*_a} \qquad z = (\xi - U\tau)\sqrt{\frac{\gamma p^*_a}{2\sigma}} \qquad m = \frac{\nu}{2\sqrt{\sigma}}\sqrt{\frac{2}{\gamma p^*_a}} \tag{4.5}$$

la vitesse de propagation du choc U étant donnée par

$$U = 1 + \frac{\gamma}{2} p^*_a \tag{4.6}$$

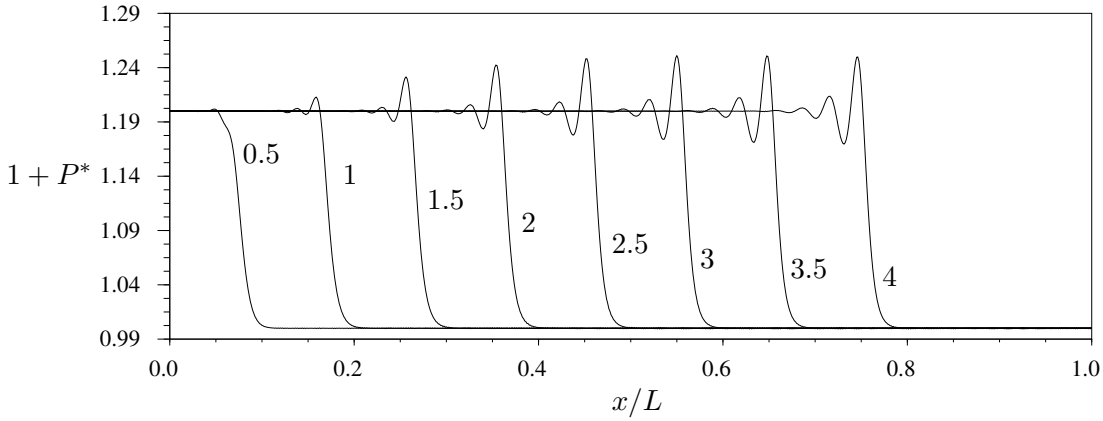


FIGURE 4.4 – Evolution du choc pour $p_a^* = 0.2$. Le paramètre m défini par (4.5) vaut approximativement 0.18.

4.2.2.3 Chocs obtenus numériquement

Nous imposons à la source d'effectuer un quart de sinusoïde d'amplitude p_a^*, puis de maintenir cette valeur constante, soit

$$P^*(\xi = 0, \tau) = \left| \begin{array}{lll} p_a^* \sin\tau & \text{si} & \tau \leq \dfrac{\pi}{2} \\ p_a^* & \text{si} & \tau > \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right. \tag{4.7}$$

Dans un premier temps, nous examinons l'onde obtenue dans les conditions de la simulation de la figure 4.1, le paramètre m étant alors de l'ordre de 0.18, avec $p_a^* = 0.2$.

La figure 4.4 montre le profil à plusieurs instants : celui-ci semble effectivement se stabiliser au bout d'environ 3 périodes. Afin de vérifier ce point plus précisément, il faut vérifier que dans le repère se déplaçant à la vitesse U donnée par (2.118), les profils à différents instants sont identiques. La figure 4.5 montre la superposition de 64 profils dans l'intervalle de temps $3 < ft < 4$, qui s'avèrent être quasiment indiscernables, ce qui prouve que la solution obtenue est bien stationnaire et se propage à la vitesse U.

Il nous est possible de représenter la structure de ce choc en traçant la trajectoire correspondante dans le plan de phase (q, q_z), et de la comparer à la trajectoire de l'équation différentielle (4.4), qui représente la strcuture du

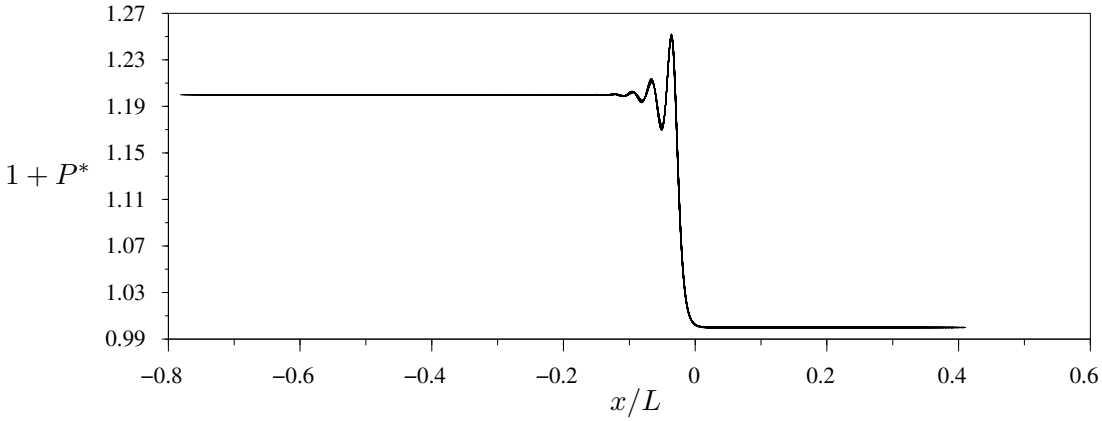


FIGURE 4.5 – Tracé des profils d'onde de la figure 4.4 dans le repère se déplaçant à la vitesse U, en 64 instants dans l'intervalle $3 < ft < 4$. Les profils sont indiscernables.

choc solution de l'équation de KdVB. Cette trajectoire ne peut être déterminée analytiquement mais s'obtient très facilement par intégration numérique de (4.4). La figure (4.6) montre que les deux trajectoires sont très proches, ce qui confirme la validité du développement précédent.

4.2.2.4 Influence des paramètres physiques sur le choc.

Rappelons les valeurs des coefficients de l'équation de KdVB γ, ν et σ déterminés dans la section 2.5.2 :

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{\eta+1}{\eta}C \qquad \nu = \frac{C}{6\eta}\,\mathcal{M}\mathcal{O} \qquad \sigma = \frac{C}{2}\,\mathcal{O}^2 \tag{4.8}$$

les paramètres $\mathcal{O}$, $\mathcal{M}$ et C valant respectivement :

$$\mathcal{O} = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad \mathcal{M} = \frac{4\mu\omega_0}{p_0} \qquad C = 1 - \left(\frac{c_m}{c_l}\right)^2 \tag{4.9}$$

Dans l'expression du coefficient C, c_m est la vitesse de phase donnée par la relation de dispersion linéaire à fréquence nulle. Il est intéressant d'exprimer ce coefficient en fonction du taux de gaz dans le milieu :

$$C = \frac{D\beta_0}{1 + D\beta_0} \qquad \text{avec} \qquad D = \frac{\eta\rho_l c_l^2}{p_0} \tag{4.10}$$

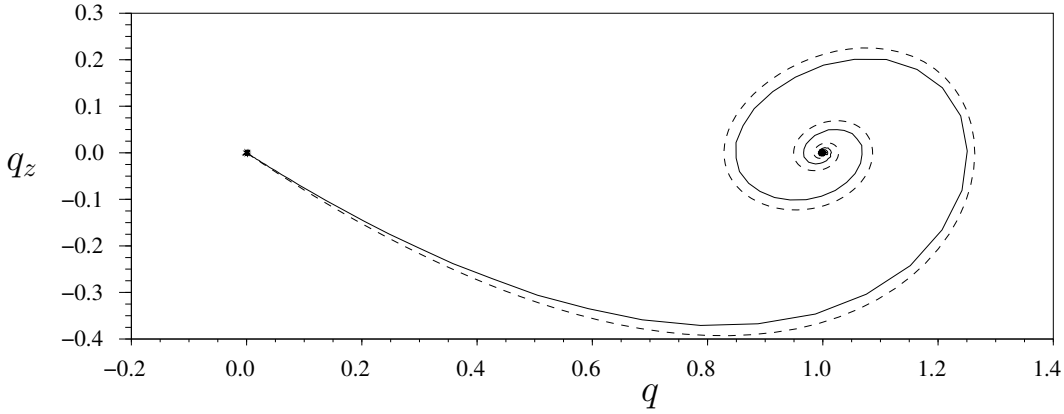


FIGURE 4.6 – En traits plein : portrait de phase correspondant au dernier profil de la figure 4.5, solution du modèle de Caflish. En traits pointillés : orbite hétérocline de l'équation (2.116), correspondant à une solution stationnaire de l'équation de KdVB. L'amplitude de la source est $p_a^* = 0.2$.

Remarquons tout d'abord que C, et donc les trois paramètres γ, ν et σ sont nuls dans la limite $\beta_0 = 0$ et on retrouve bien alors l'équation de propagation dans le liquide pur.

Examinons ensuite la valeur du paramètre m, qui est le seul paramètre régissant la forme du choc : si l'on utilise les expressions (4.8) des coefficients de l'équation de KdVB, il s'exprime par

$$m = \frac{1}{3\eta}\sqrt{\frac{2\eta}{\eta+1}}\frac{\mathcal{M}}{\sqrt{p_a^*}} \tag{4.11}$$

On remarque que ce coefficient ne dépend ni de la fréquence, ni du taux de gaz, mais seulement de la viscosité du liquide et de l'amplitude du choc. Cela signifie que la forme du choc obtenue est indépendante d'une part de la dynamique de la perturbation imposée par la source, et d'autre part du taux de gaz dans le liquide à bulles.

Afin de vérifier tout d'abord l'indépendance de ce paramètre par rapport à la fréquence, nous avons simulé la propagation du choc pour différentes fréquences de la source : $f = 20$ kHz correspondant aux figures 4.4 et 4.6, $f = 60$ kHz et $f = 120$ kHz. Ces fréquences correspondent respectivement à des valeurs de $\mathcal{O} = f/f_0$ de 0.072, 0.215 et 0.43. L'invariance de m peut être vérifiée en comparant les orbites dans le plan de phase, qui doivent être identiques. Comme le montre la figure 4.7, c'est bien le cas.

Le même principe peut être utilisé pour vérifier l'invariance de m par rapport à β_0. La figure 4.8, qui superpose les orbites obtenues pour des taux de vide

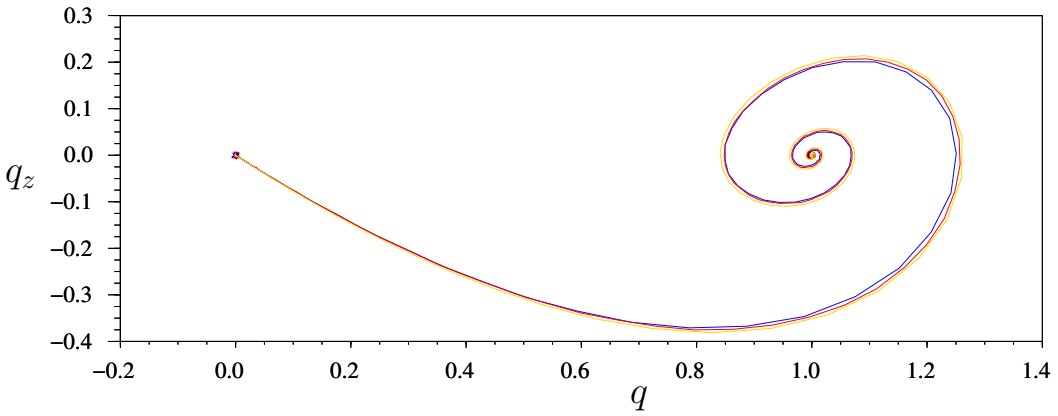


FIGURE 4.7 – Comparaison des orbites obtenues numériquement pour différentes fréquences de la source $f = 20$, 60, ou 120 kHz (amplitude $p_a^* = 0.2$). Le résultat montre clairement que la forme du choc est indépendante de la fréquence.

β_0 valant respectivement 5.10^{-5}, 5.10^{-4} et 5.10^{-3}, confirme ce résultat.

Enfin, le scaling utilisé dans la section 2.5.2 implique que l'équivalence du modèle de Caflish avec l'équation de KdVB est assujettie à la petitesse de l'amplitude de la perturbation. Nous avons donc effectué la comparaison des orbites pour des amplitudes de choc $p_a^* = 0.5$ et $p_a^* = 0.7$. Les orbites obtenues figure 4.9 montrent que la corrélation devient très mauvaise pour de telles amplitudes.

On peut tenter de chercher quelle est l'étape de calcul dans la section 2.5.2 la plus simplificatrice : il est vraisemblable que le développement de l'équation de Rayleigh à l'ordre 2 est insuffisant et pour s'en convaincre, il suffit de comparer le rayon des bulles le long du choc obtenu numériquement, avec l'expression approchée (2.92). La figure 4.10 obtenue pour une amplitude $p_a^* = 0.5$ montre effectivement que la différence est significative, et introduit même une erreur non négligeable sur la valeur du rayon en aval du choc, ce qui est logique puisque nous avons développé la relation polytropique à l'ordre 2. Le développement quasi-linéaire de l'équation de Rayleigh semble être une cause essentielle de la mauvaise corrélation entre le modèle de Caflish et l'équation de KdVB pour des amplitudes élevées.

Avant de conclure sur la validation numérique de l'équivalence modèle de Caflish-équation de KdVB, nous cherchons à retrouver un autre type d'onde bien connu dans les milieux dispersifs non-linéaires.

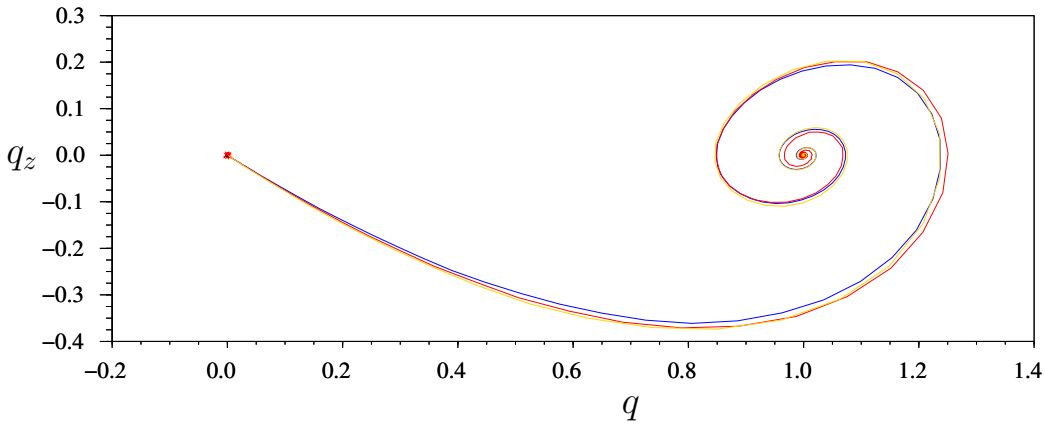


FIGURE 4.8 – Comparaison des orbites obtenues numériquement pour des taux de gaz $\beta_0 = 5.10^{-5}, 5.10^{-4}$ et 5.10^{-3} (amplitude $p_a^* = 0.2$). Le résultat confirme l'invariance de la forme du choc par rapport au taux de gaz.

4.2.3 Solitons

Dans le cas où le terme dissipatif de l'équation de KdVB est négligé, nous obtient simplement une équation de Korteweg-de Vries. Cette dernière admet comme solution remarquable des trains de solitons.

Afin de vérifier tout au moins qualitativement cette propriété, nous avons effectué une simulation du modèle de Caflish, en prenant les viscosités du liquide et augmentée nulles, de manière à rendre le paramètre ν nul. La perturbation engendrée par la source est une demi-alternance positive, autrement dit un pulse de compression, soit :

$$P^*(\xi = 0, \tau) = \left| \begin{array}{lll} p_a^* \sin\tau & \text{si} & \tau \leq \pi \\ 0 & \text{si} & \tau > \pi \end{array} \right. \tag{4.12}$$

La figure 4.11 montre que le profil tend effectivement vers un train de 4 solitons, et l'on retrouve une propriété classique : les sommets des solitons sont alignés sur une droite, du fait qu'ils progressent avec des vitesses proportionnelles à leurs amplitudes respectives.

Une vérification plus quantitative des propriétés de ce train de solitons, comme par exemple le nombre et l'amplitude des solitons émergents est une entreprise assez délicate sur le plan analytique. Ce type d'étude est de plus généralement effectué pour des problèmes de conditions initiales, où l'on regarde l'évolution d'un profil de forme donné $p^*(\xi, \tau = 0)$ imposé à l'instant

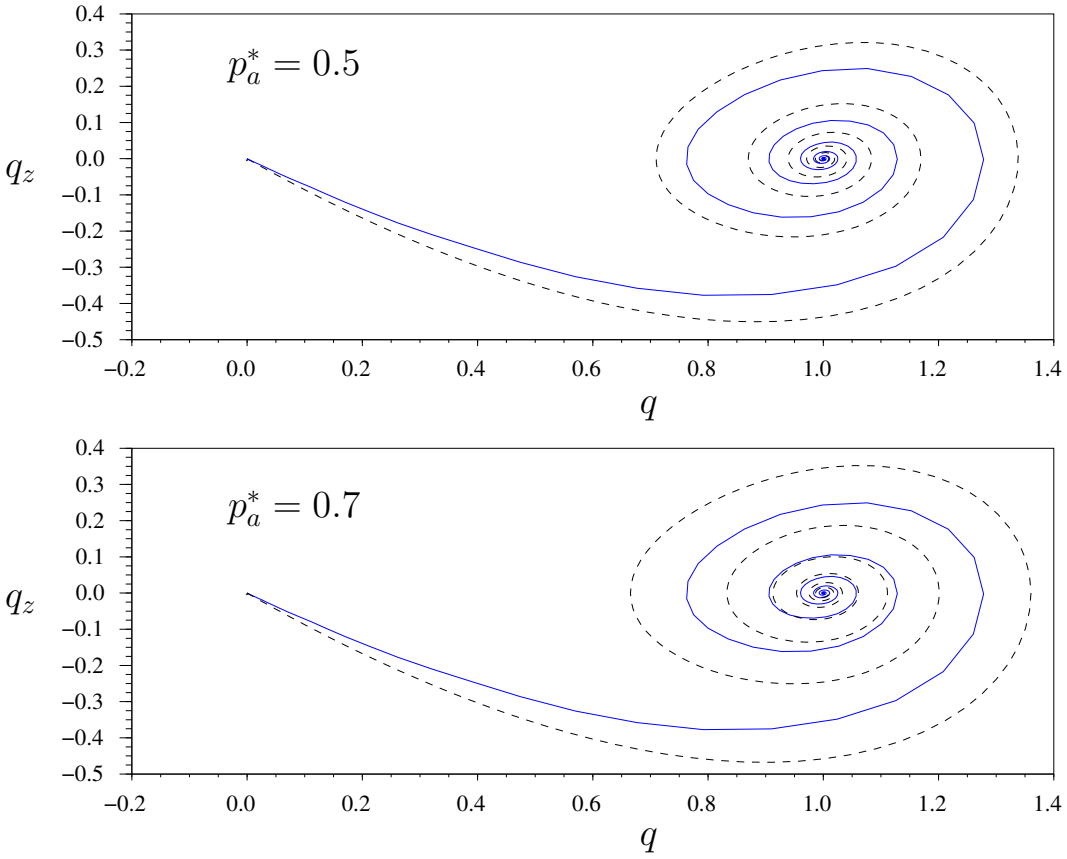


FIGURE 4.9 – Comparaison des orbites des chocs obtenus numériquement par le modèle de Caflish (en traits pleins) avec la solution de l'équation de KdVB (en traits pointillés). Sur la figure du haut $p_a^* = 0.5$ et sur celle du bas $p_a^* = 0.7$. L'approximation n'est plus valable quantitativement.

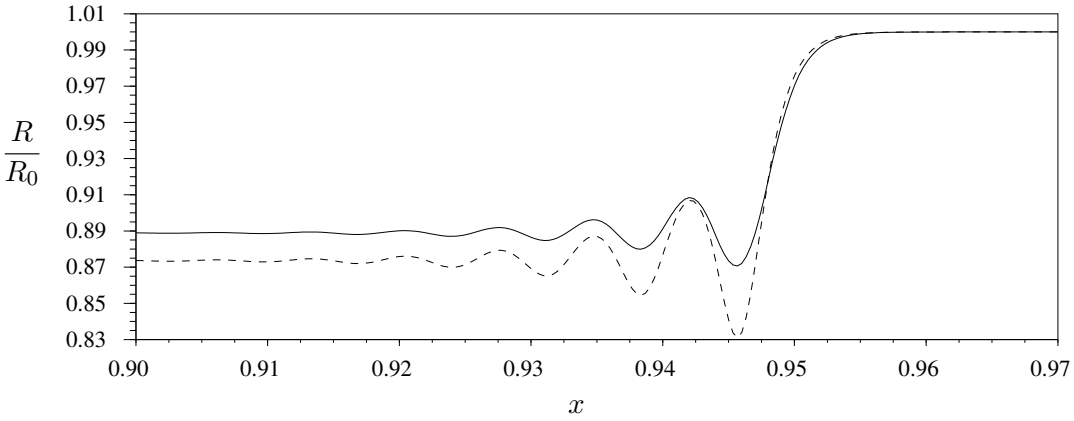


FIGURE 4.10 – Comparaison du rayon le long du choc obtenu numériquement (en traits pleins) et calculé par l'expression (2.92) (en traits pointillés).

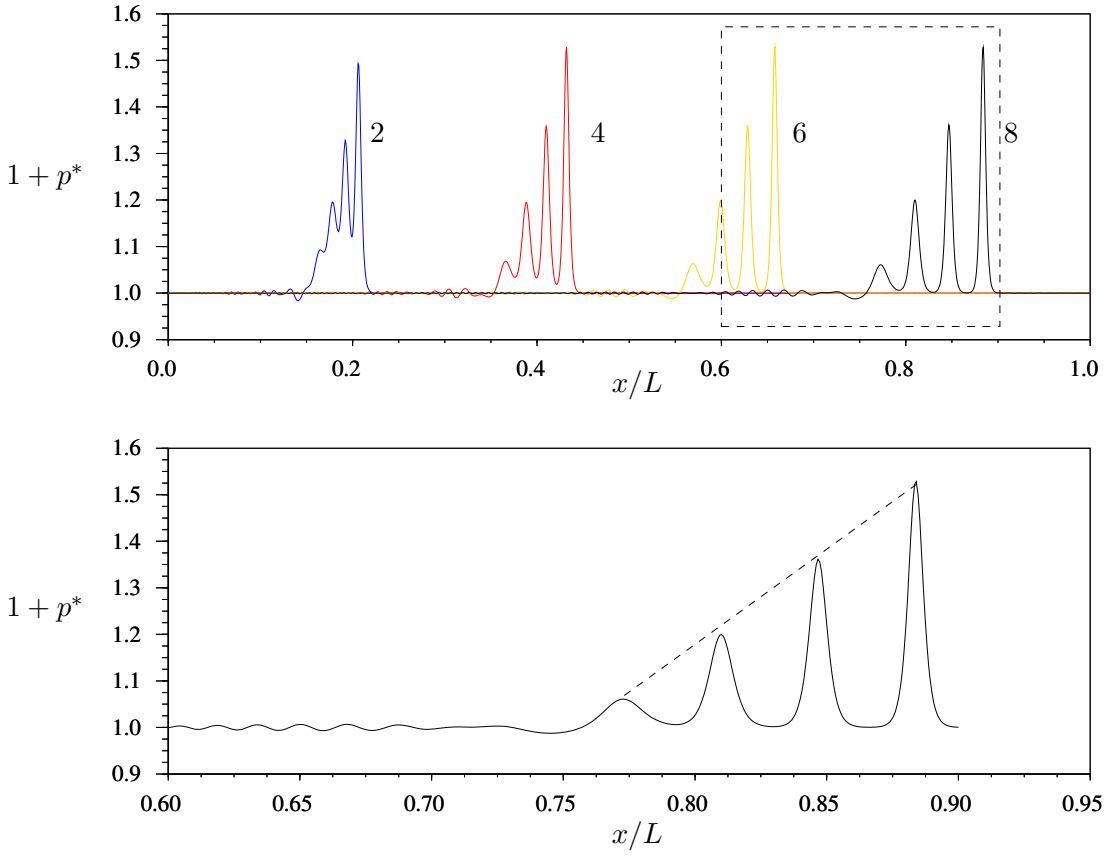


FIGURE 4.11 – Simulation effectuée avec un terme de dissipation nul. L'équation équivalente est une équation de Korteweg-de Vries, qui prédit la transformation du pulse en un train de solitons. $L = 25$ cm et $p_a^* = 0.3$

initial. Ici, nous avons à faire à un problème dit «de signalement», où l'on étudie la perturbation engendrée par des variations temporelles imposées en un point donné $\xi = 0$ du milieu. Nous pouvons malgré tout calculer un ordre de grandeur d'après les résultats de Berezin and Karpman (1966) qui, pour un profil initial de la forme

$$P^*(\xi, \tau = 0) = p_a^* \operatorname{sech}^2 (\xi/l) \tag{4.13}$$

établit le nombre de solitons émergents :

$$N = \left(\frac{\gamma p_a^*}{6\sigma} \right)^{1/2} \tag{4.14}$$

Comme nous avons approximativement $P_\tau^* = -P_\xi^*$ (voir section 2.5.2), nous pouvons considérer que notre problème de signalement défini par (4.12) est à peu près équivalent au problème de valeur initiale (voir figure 4.12)

$$P^*(\xi, \tau = 0) = \left| \begin{array}{lll} p_a^* \sin \xi = -p_a^* \cos \left(\xi + \dfrac{\pi}{2} \right) & \text{si} & \xi \in [-\pi, 0] \\ 0 & \text{sinon} & \end{array} \right. \tag{4.15}$$

On peut enfin considérer que les fonctions cos et sech^2 sont égales (voir figure 4.12), et appliquer la formule (4.14). On obtient pour la simulation précédente $N = 4.81$, et même ce calcul très approximatif confirme donc bien le résultat obtenu numériquement. Ce résultat montre à nouveau la validité de la réduction envisagée précédemment.

4.2.4 Synthèse

Dans cette section, nous avons vérifié par simulation d'ondes progressives l'ensemble des résultats analytiques obtenus dans la section 2.5 pour des ondes non-linéaires, en particulier la réduction possible du modèle de Caflish à une équation de KdVB dans le domaine des basses fréquences. Les limites de cette réduction ont été mises en évidence, et portent essentiellement sur l'amplitude de la perturbation de pression.

De plus, un résultat particulièrement intéressant sur le plan physique a été obtenu : l'amortissement spatial de l'onde croît notablement avec l'amplitude de la source.

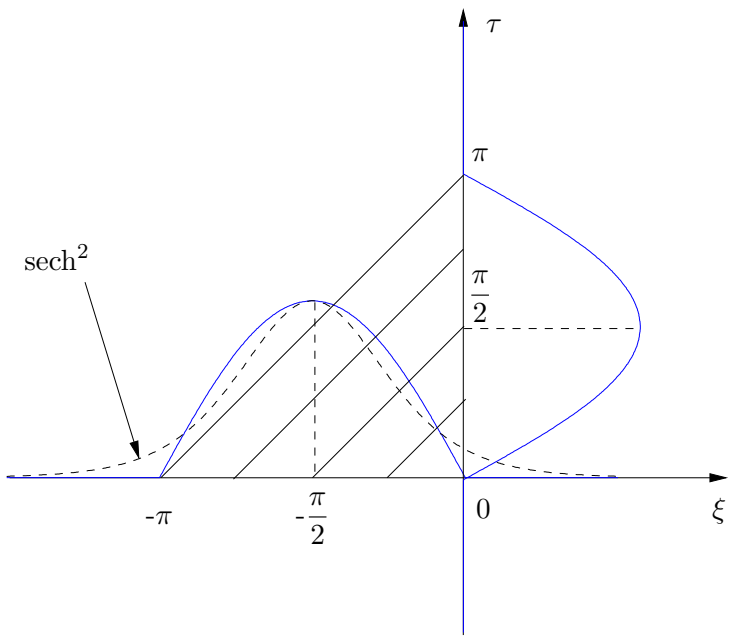


FIGURE 4.12 – Conversion du problème de signalement en problème de valeur initiale. On voit que la démarche est valide si le profil ne se déforme pas trop sur une distance adimensionnelle de π, de telle sorte que les caractéristiques restent quasiment parallèles. Par ailleurs on voit que les fonctions cos et sech^2 peuvent être sensiblement confondues.

4.3 Ondes stationnaires

4.3.1 Choix des paramètres

Nous nous intéressons maintenant à l'établissement d'un régime d'ondes stationnaires, et nous laissons donc l'onde se réfléchir librement sur le réflecteur en $x = L$. Le temps de simulation est pris suffisamment grand pour que les grandeurs en chaque point soient périodiques, ce qui comme nous le verrons, n'est pas toujours possible.

Dans la mesure où nous cherchons essentiellement à mettre en évidence des phénomènes non-linéaires liés à la complexité du milieu, nous avons choisi de considérer un réflecteur le plus simple possible, en l'occurrence un réflecteur parfait, imposant une vitesse nulle.

Ensuite, il nous semble que les paramètres cruciaux intervenant dans le phénomènes de propagation sont le rapport de la fréquence à la fréquence de résonance des bulles f/f_0 d'une part, et l'amplitude de l'excitation p_a^* d'autre part.

Le choix de la fréquence est dicté par la volonté de mettre en évidence les différences par rapport à l'hypothèse linéaire, et divise cette section en deux parties. Dans un premier temps, nous nous intéresserons au domaine des basses fréquences ($f \ll f_0$), traité dans la section précédente pour des ondes progressives. Ensuite, nous explorerons la région $f/f_0 \simeq 1/2$ dans laquelle la résonance non-linéaire 2/1 est susceptible de se manifester, cette caractéristique ne pouvant être mise en évidence que par un modèle non-linéaire.

La longueur L du tube sera généralement choisie suffisamment faible pour ne pas avoir à utiliser un grand nombre de noeuds dans le maillage. Cette longueur joue un rôle prépondérant dans certains cas, et nous la ferons donc varier en cas de besoin.

Enfin, le choix d'un taux de gaz β_0 est difficile à justifier arbitrairement. Nous avons vu dans le cadre linéaire que son augmentation joue essentiellement sur la vitesse de phase et l'atténuation. Nous avons choisi la valeur $\beta_0 = 5.10^{-4}$. Ce choix présente naturellement un caractère arbitraire, puisque la densité de bulles dans une expérience de cavitation acoustique n'est pas une donnée du problème, à moins que les bulles ne soient créées artificiellement comme dans les expériences de Silberman (1957). Cela dit, les expérimentations récentes de Labouret (1998) pour des fréquences de 300 kHz fournissent des taux de vide de cet ordre de grandeur.

4.3.2 Présentation des résultats

Rappelons tout d'abord que les résultats fournis par le code sont les grandeurs ϕ, p, R et $\dot{R}$ en chaque point x à chaque instant t. Chaque grandeur G parmi ces dernières définit donc en fait une surface $G(x,t)$. On pourrait par exemple présenter l'allure du profil de pression entre $x = 0$ et $x = L$ pour chaque instant t, mais cette solution pose un problème de lisibilité des résultats. Nous avons vu que pour une onde stationnaire, l'enveloppe du profil de pression pouvait déjà fournir une information intéressante, et nous présenterons pour chaque simulation, les courbes

$$G_{\max}(x) = \max_t G(x,t) \quad G_{\min}(x) = \min_t G(x,t) \tag{4.16}$$

pour la grandeur $G = p/p_0 - 1$. Les enveloppes prédites par la théorie linéaire seront superposées à celles obtenues par simulation.

Ensuite, afin de visualiser les distorsions induites par la non-linéarité du problème, on présentera les évolutions temporelles de p/p_0 et R/R_0 en quelques points du milieu, ainsi que leur contenu spectral obtenu par une FFT.

Dans certains cas, la surface $G(x,t)$ pourra avantageusement être représentée par ses courbes de niveaux, qui sont en fait les courbes caractéristiques du phénomène propagatif. Notons que pour une onde stationnaire linéaire, ces courbes de niveaux forment dans le plan (x,t) un série d'ellipses concentriques dont les centres sont distants de $\lambda/2$ suivant x et de $T/2$ suivant t.

Enfin, remarquons que l'enveloppe d'une onde stationnaire linéaire peut être vue comme l'amplitude de l'harmonique 1 en fonction de x. Dans le cadre non-linéaire, des harmoniques d'ordre supérieur ou inférieur apparaissent dans le spectre de manière différente en chaque point. Afin de visualiser le contenu harmonique global des différentes grandeurs, nous pouvons calculer en chaque point x les différentes raies d'une grandeur donnée, puis représenter ensuite les variations spatiales de chaque raie. Cette représentation permet, comme nous le verrons, de mieux comprendre la manière dont les harmoniques sont engendrés.

4.3.3 Basses fréquences ($f \ll f_0$)

Nous reprenons une fréquence d'excitation de $f = 20$ kHz et des bulles de rayon d'équilibre de 10 μm, ce qui donne un rapport f/f_0 de l'ordre de 0.072. La figure 4.13 montre l'atténuation et la vitesse de phase linéaires pour cette

taille de bulle en fonction de la fréquence, et la position de $f = 20$ kHz sur cette abaque.

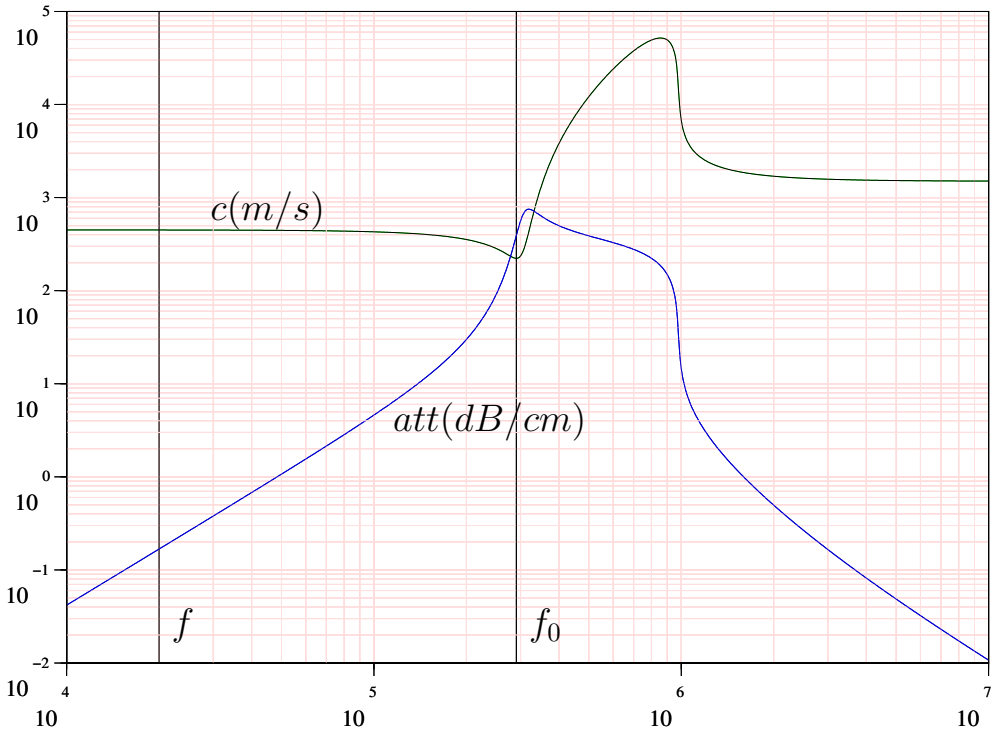


FIGURE 4.13 – Vitesse de phase et atténuation pour une bulle de 10 μm avec un taux de gaz $\beta_0 = 5.10^{-4}$. Les lignes notées f et f_0 correspondent à la fréquence d'excitation considérée ici et à la fréquence de résonance de la bulle.

Ces paramètres correspondent à une vitesse de phase de 449 m/s (ce qui correspond à une longueur d'onde de 2.25 cm) et une atténuation de 0.15 dB/cm. Nous choisissons donc pour commencer une longueur L de l'ordre de la longueur d'onde effective soit $L = 3$ cm.

Pour toutes les figures qui vont suivre, les courbes en traits noirs représenteront les résultats non-linéaires, et les courbes en traits fins les résultats linéaires.

Tout d'abord, nous nous assurons que pour une excitation faible, le code fournit bien les résultats prédits par la théorie linéaire. La pression acoustique imposée à l'émetteur est $p_a^* = 10^{-3}$.

La figure 4.14 montre que l'enveloppe de l'onde stationnaire obtenue et l'enveloppe linéaire sont quasiment indiscernables. Les évolutions temporelles de

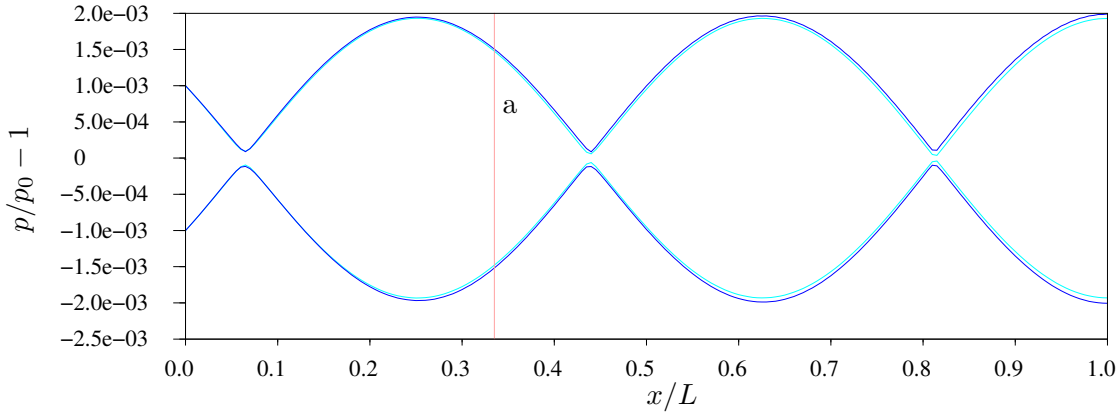


FIGURE 4.14 – En traits noirs : enveloppe de l'onde stationnaire pour $p_a^* = 10^{-3}$: le profil est quasiment indiscernable du profil obtenu par la théorie linéaire (en traits fins).

p et R au point défini par la ligne «a» sont représentées figure 4.15, superposées aux courbes prédites par la théorie linéaire. La seul raie présente dans le spectre est la fréquence d'excitation, et nous sommes bien dans les conditions de validité de la théorie linéaire.

Considérons maintenant une pression d'excitation $p_a^* = 5.10^{-2}$. La figure 4.16 montre que l'enveloppe diffère notablement de la théorie linéaire et qu'elle est dissymétrique. Sa structure générale laisse apparaître malgré tout des ventres et des noeuds placés sensiblement aux endroits prévus par la théorie linéaire.

Les figures 4.17 et 4.18 montrent les évolutions temporelles de la pression et du rayon aux abscisses notées «a» et «b». On constate l'apparition de distorsion par génération d'harmonique 2. La figure 4.18 montre qu'aux noeuds du profil linéaire (abscisse «b»), l'harmonique 1 devient très faible, et que l'harmonique 2 est prépondérant, ce qui explique pourquoi l'enveloppe non-linéaire de la figure 4.16 ne s'annule pas en ces points.

Pour avoir une vue globale des variations spatiales de chaque harmonique, nous représentons figure 4.19 les amplitudes des harmoniques 1 et 2 en fonction de x.

Pour une amplitude d'excitation de $p_a^* = 0.1$, l'enveloppe obtenue et les évolutions temporelles de p et R sont présentées figures 4.20, 4.21 et 4.22. On voit d'après ces figures que la distorsion conduit à des signaux quasiment triangulaires, le contenu harmonique étant de plus en plus riche. Nous indiquons figure 4.23 les amplitudes des 4 premiers harmoniques en fonction de

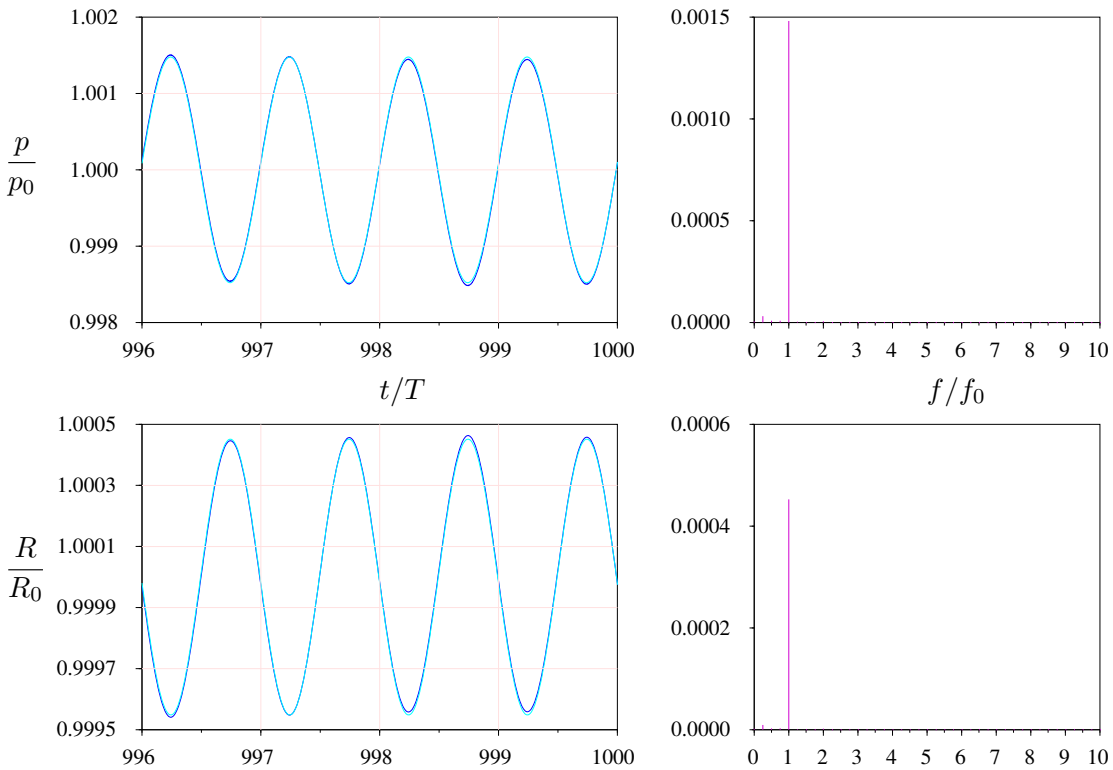


FIGURE 4.15 – Pression et rayon en fonction du temps à l'abscisse notée «a» sur la figure 4.14 ($p_a^* = 10^{-3}$). Le seul harmonique présent est l'harmonique 1.

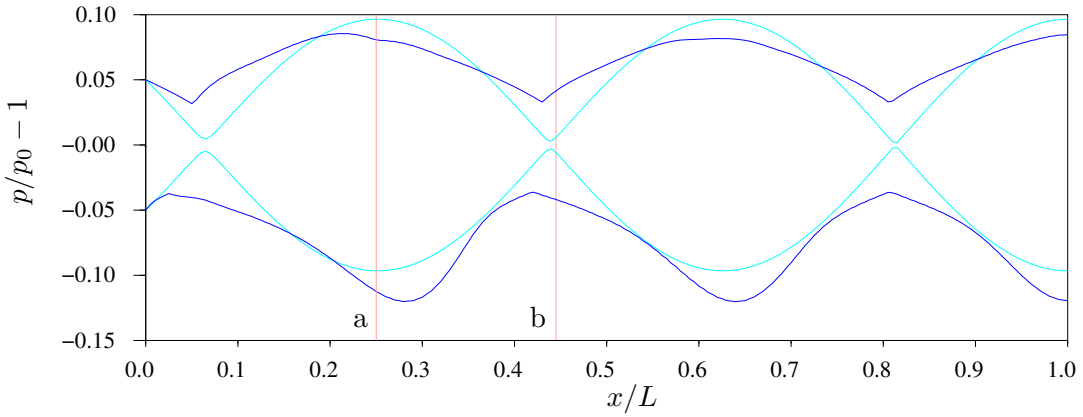


FIGURE 4.16 – Enveloppe de l'onde stationnaire pour $p_a^* = 5.10^{-2}$: on constate une distorsion notable de l'enveloppe.

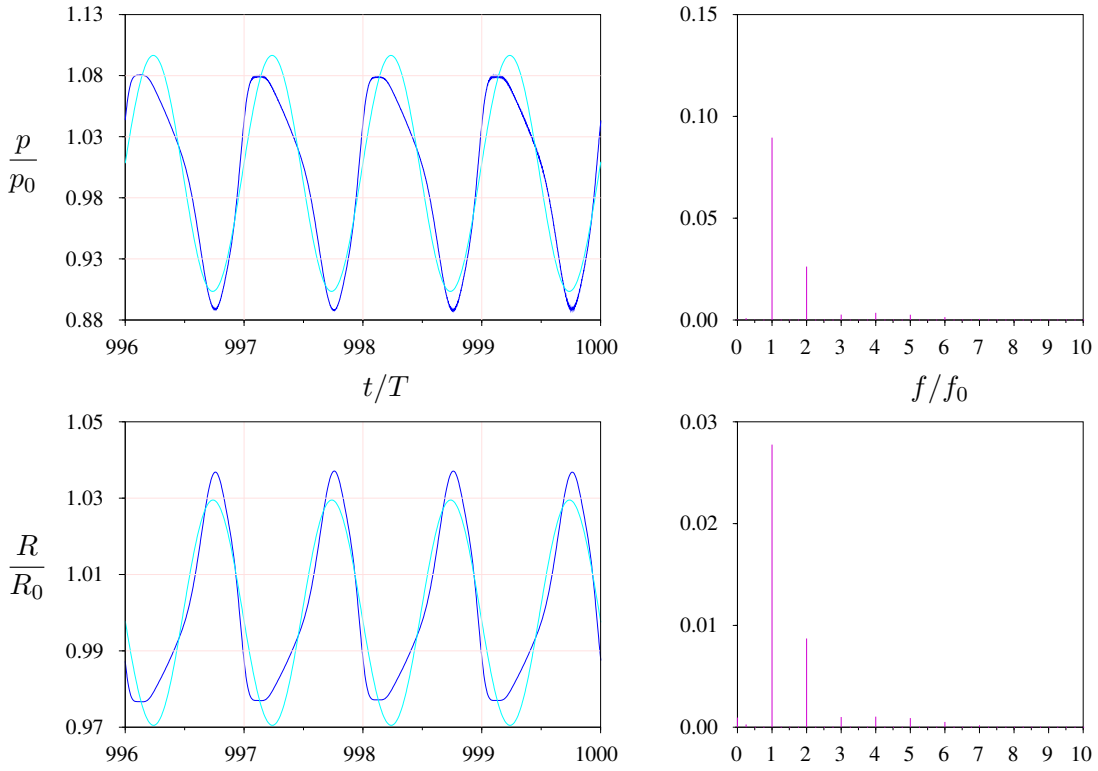


FIGURE 4.17 – Pression et rayon en fonction du temps à l'abscisse notée «a» sur la figure 4.16 ($p_a^* = 5.10^{-2}$)

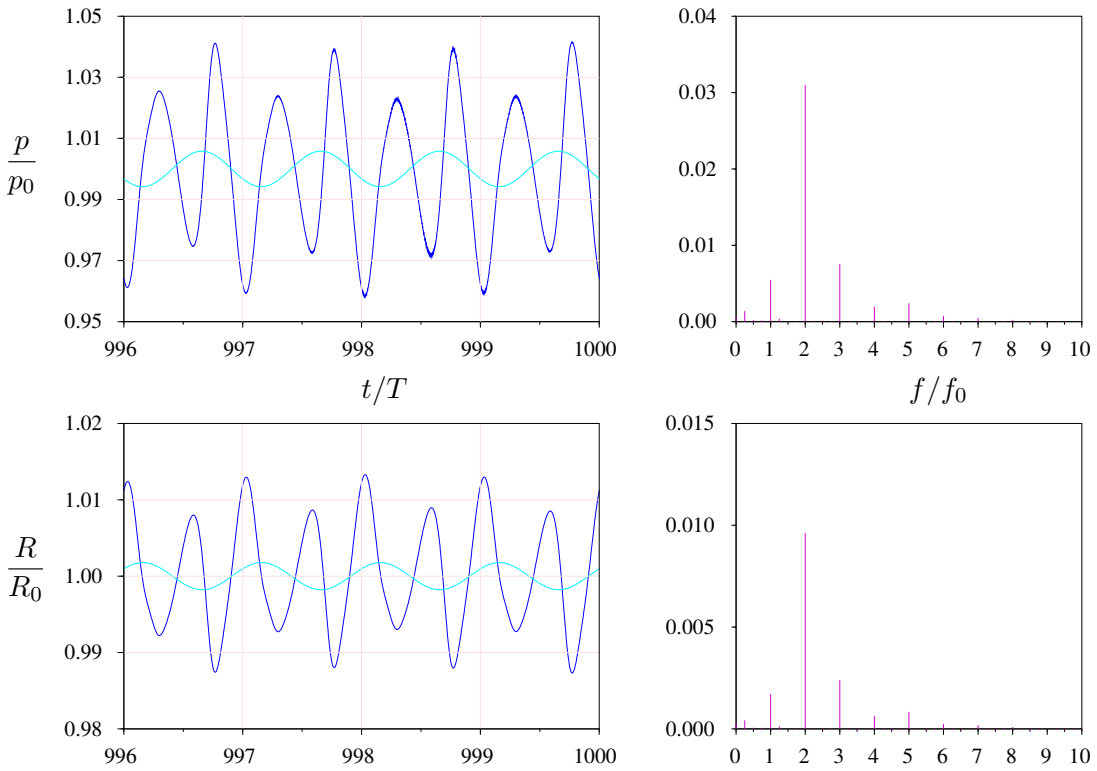


FIGURE 4.18 – Pression et rayon en fonction du temps à l'abscisse notée «b» sur la figure 4.16 ($p_a^* = 5.10^{-2}$)

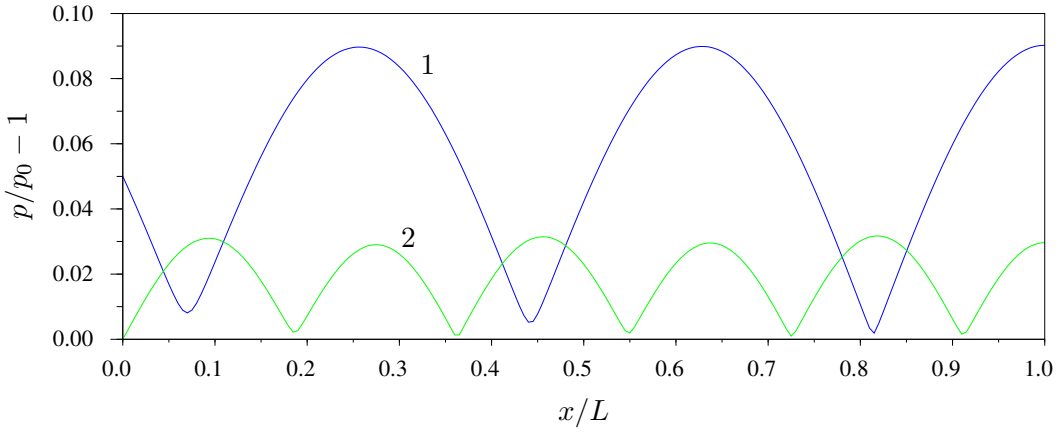


FIGURE 4.19 – Amplitude des harmoniques 1 et 2 de la pression en fonction de x ($p_a^* = 5.10^{-2}$).

x.

Augmentons maintenant l'amplitude de l'excitation jusqu'à $p_a^* = 0.2$: l'enveloppe obtenue est de plus en plus complexe (figure 4.24) et les évolutions temporelles de p et R au point noté «a» sont indiquées figure 4.25. Un phénomène curieux apparaît : ces grandeurs sont apériodiques comme le confirment les spectres. Nous avons cherché à savoir si cela était dû à un problème d'établissement de régime permanent, en poussant la simulation jusqu'à 6000 périodes acoustiques, et la conclusion reste la même. Il semblerait donc que cette apériodicité soit une propriété structurelle du système. En observant attentivement les spectres figure 4.25, on remarque une raie importante à une fréquence basse $F < f_0$ ainsi que des raies à $f_0 - F$ et $f_0 + F$, $2f_0 - F$ et $2f_0 + F$, etc... ce qui suggère une modulation d'un régime périodique par la fréquence F.

Plus curieux encore : ce caractère apériodique paraît sensible à la longueur du domaine. Nous avons choisi une longueur du domaine $L = 2.81$ cm égale à $5/4$ fois la longueur d'onde effective dans le milieu, de telle sorte que la cavité $[0, L]$ serait résonante pour une onde linéaire. Nous avons alors pu constater que ce simple changement de la longueur conduit cette fois à un régime périodique.

Afin d'examiner plus en détail la corrélation entre la résonance de la cavité et le caractère périodique de p et R, nous avons effectué deux autres simulations avec des longueurs valant respectivement $L = 6.37$ cm et $L = 6.17$ cm la dernière correspondant à $11/4$ fois la longueur d'onde effective. Dans les deux cas, nous avons trouvé des régimes apériodiques, mais l'apériodicité est nettement moins marquée dans le cas de la longueur résonante.

Nous proposons maintenant une tentative d'interprétation de ce caractère apériodique.

4.3.3.1 Interprétation de l'apériodicité

Nous nous proposons d'examiner ici l'effet de la réflexion d'une onde incidente d'une part, et l'interaction de l'onde réfléchie avec l'onde incidente d'autre part.

Pour simplifier le problème, nous considérerons une onde sous forme d'un pulse engendré par une demi-alternance positive de la source, comme nous l'avions fait pour l'étude des solitons (équation (4.12)).

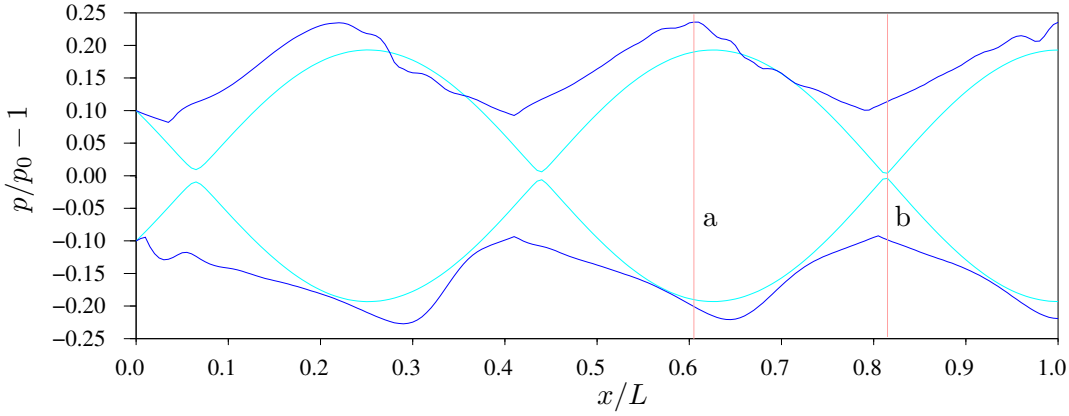


FIGURE 4.20 – Enveloppe de l'onde stationnaire pour $p_a^* = 0.1$.

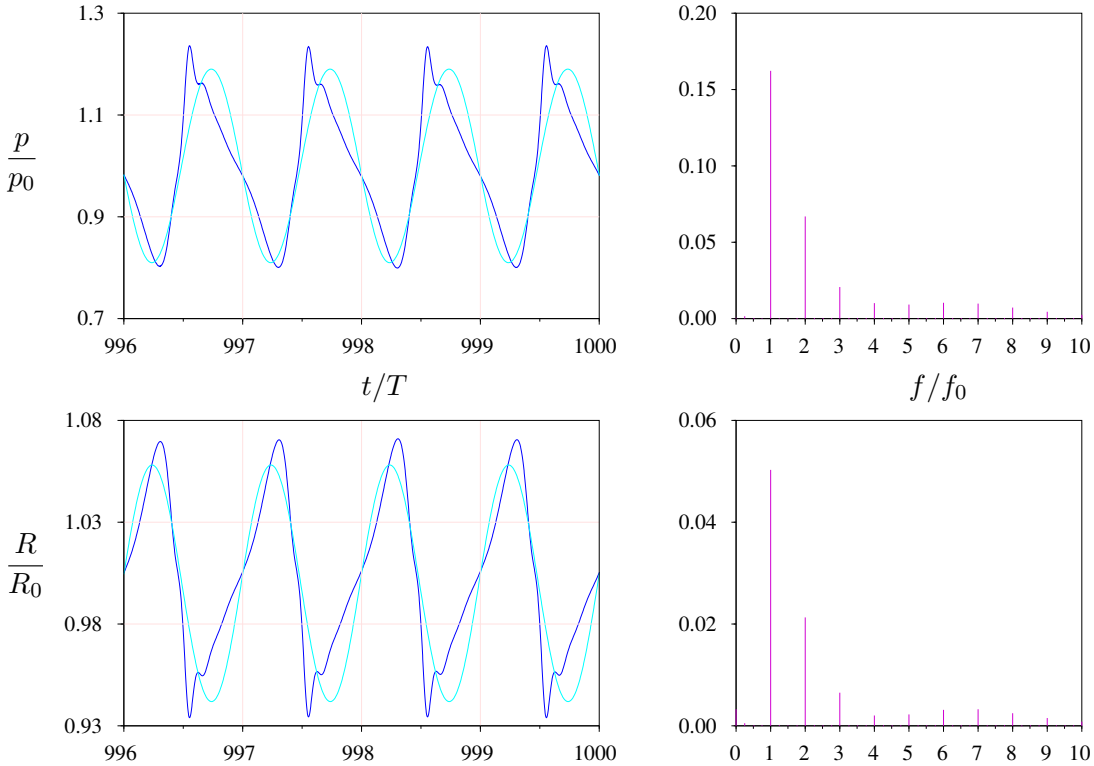


FIGURE 4.21 – Pression et rayon en fonction du temps à l'abscisse notée «a» sur la figure 4.20 ($p_a^* = 0.1$).

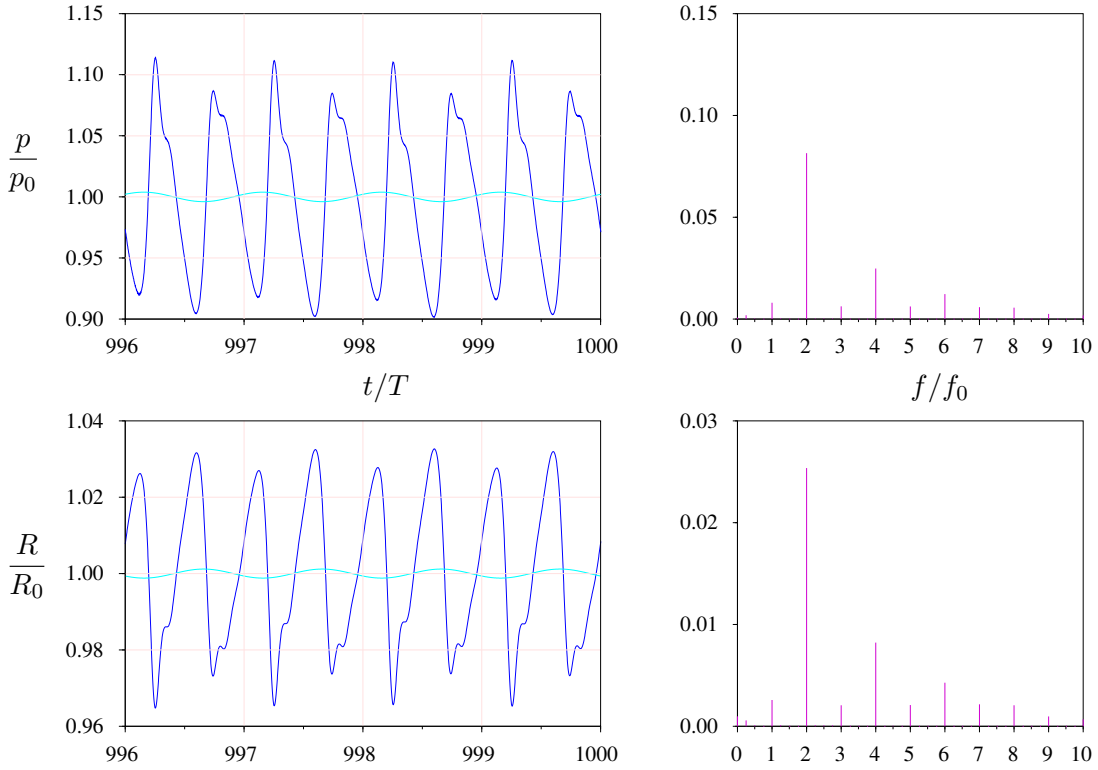


FIGURE 4.22 – Pression et rayon en fonction du temps à l'abscisse notée «b» sur la figure 4.20 ($p_a^* = 0.1$).

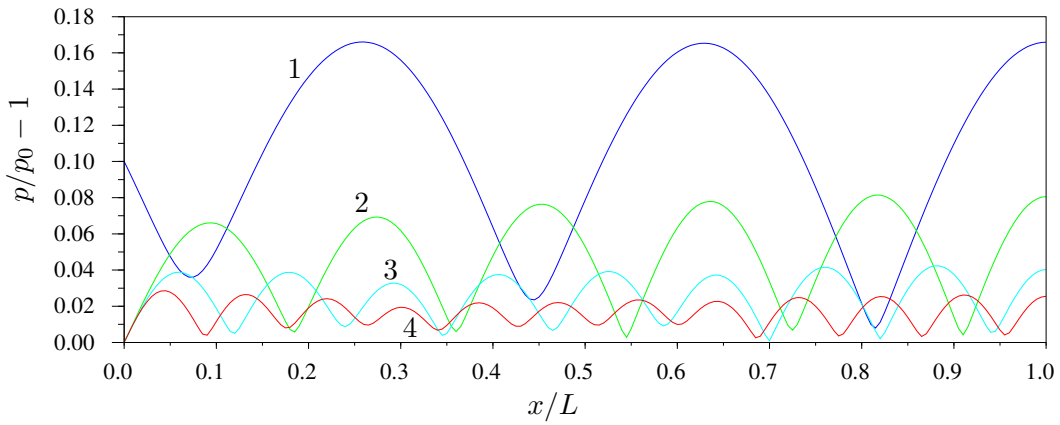


FIGURE 4.23 – Amplitude des harmoniques 1, 2, 3 et 4 de la pression en fonction de x ($p_a^* = 0.1$).

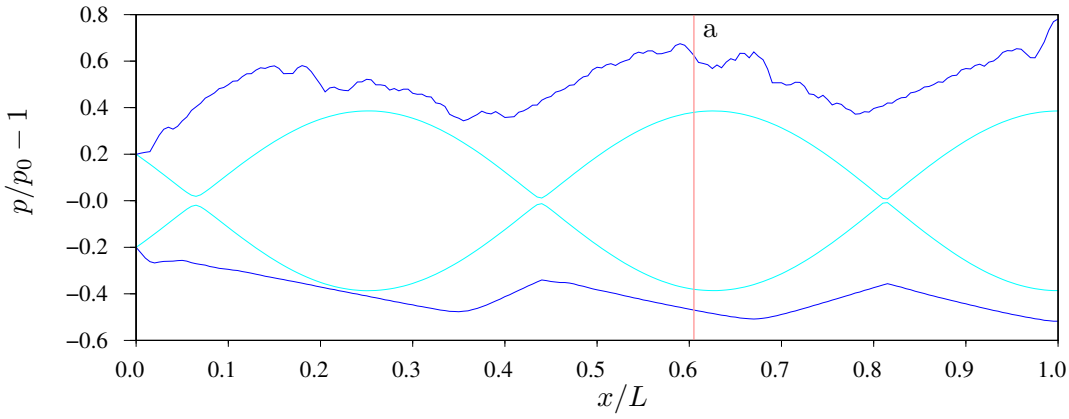


FIGURE 4.24 – Enveloppe de l'onde stationnaire pour $p_a^* = 0.2$.

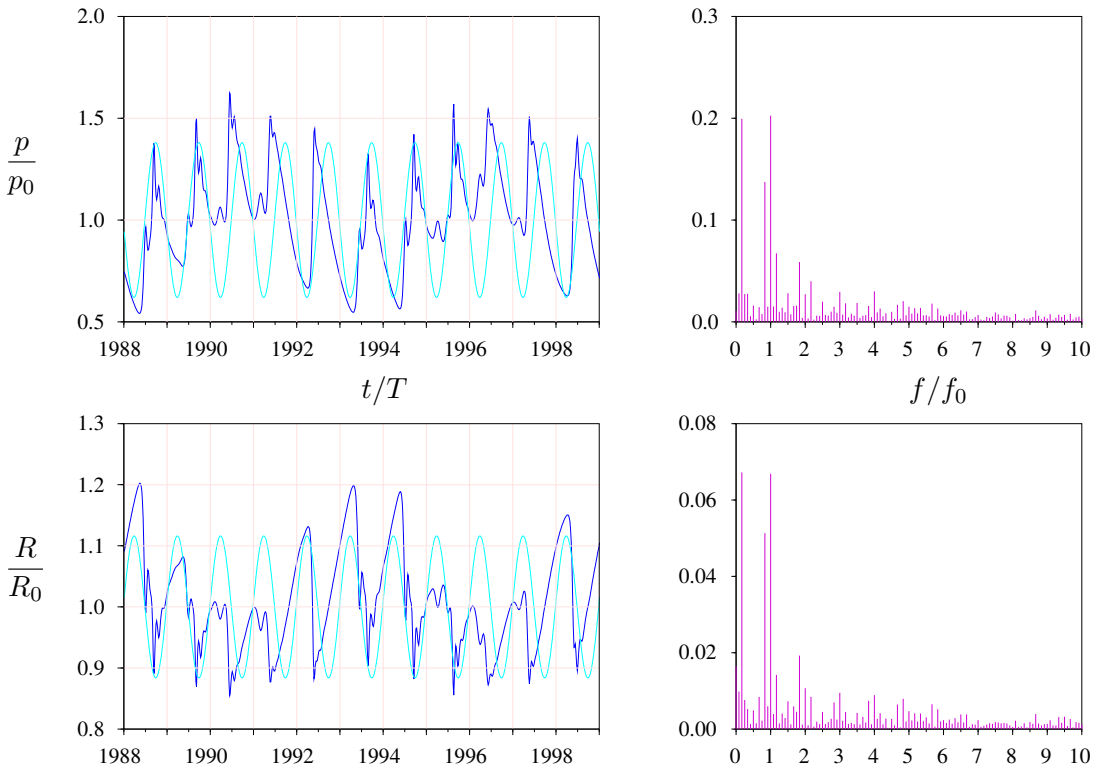


FIGURE 4.25 – Pression et rayon en fonction du temps à l'abscisse notée «a» sur la figure 4.24 ($p_a^* = 0.2$).

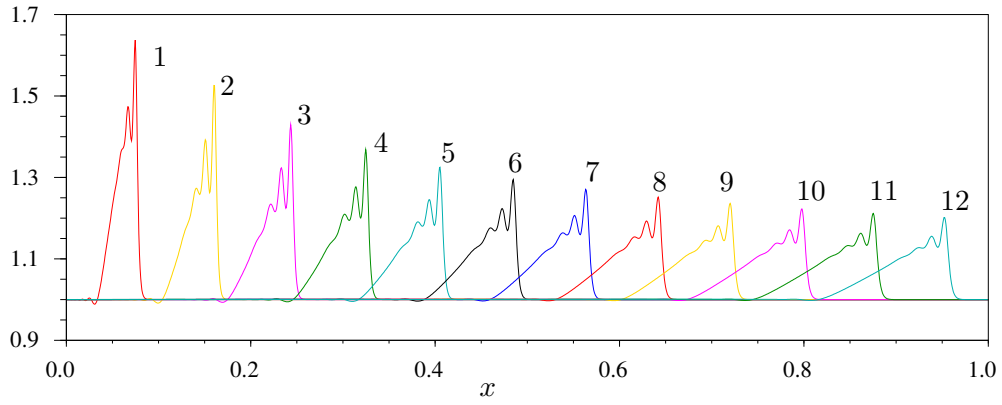


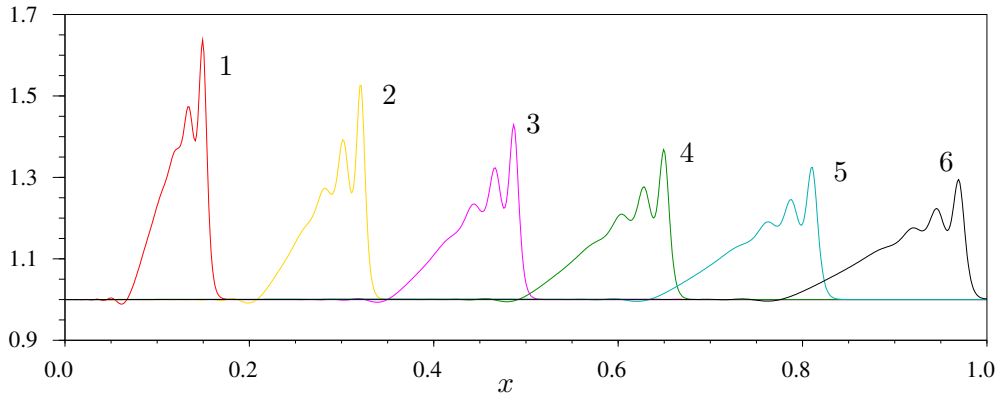
FIGURE 4.26 – Evolution du profil au cours du temps pour un pulse sinusoïdal. Les labels sur les courbes indiquent le temps adimensionnel ft. L'amplitude de la source est $p_a^* = 0.5$.

4.3.3.2 Réflexion d'une onde non-linéaire

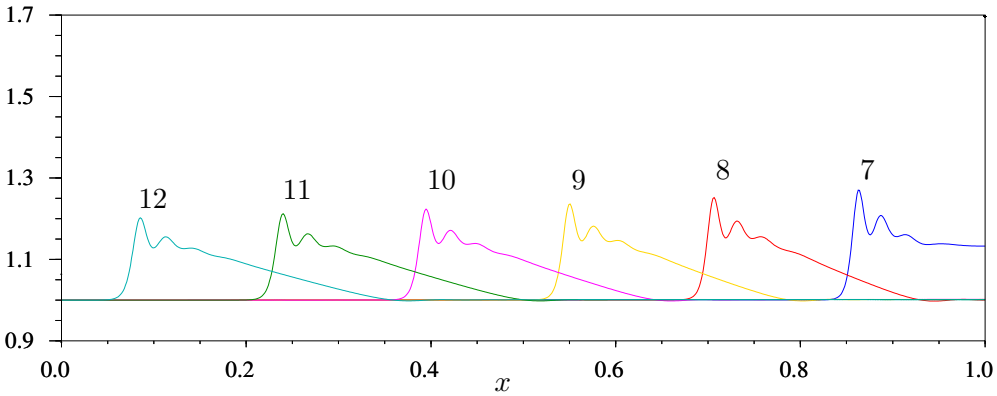
Pour étudier les caractéristiques de l'onde réfléchie, nous procédons de la manière suivante : dans un premier temps nous effectuons une simulation (notée I) de l'onde incidente avec une longueur L assez élevée ($L = 30$ cm) pour qu'à la fin de la simulation, l'onde ne soit toujours pas parvenue jusqu'au réflecteur. La figure (4.26) montre la forme du profil obtenue à différents instants.

Ensuite, nous effectuons une deuxième simulation (notée II) sur le même horizon de temps, mais avec une longueur de domaine deux fois plus courte ($L = 15$ cm), de telle sorte que l'onde se réfléchisse sur la paroi. Les profils obtenus sont présentés figure 4.27. Nous comparons ensuite au mêmes instants, l'allure de l'onde incidente de la simulation I à celle de l'onde réfléchie de la simulation II, que nous «retournons» par symétrie par rapport à $x = L$. En d'autres termes, cela revient à retourner la figure 4.27.b, à la mettre bout-à-bout avec la figure 4.27.a, et à comparer le résultat à la figure 4.26.

La figure (4.28) montre que les deux profils sont très similaires, légèrement déphasés l'un par rapport à l'autre, l'onde réfléchie étant en avance, ce qui signifie que le profil accélère lors de la réflexion sans quasiment modifier sa forme.



Profil avant réflexion



Profil après réflexion

FIGURE 4.27 – Réflexion du profil sur une paroi rigide. Les labels sur les courbes indiquent le temps adimensionnel ft. L'amplitude de la source est $p_a^* = 0.5$.

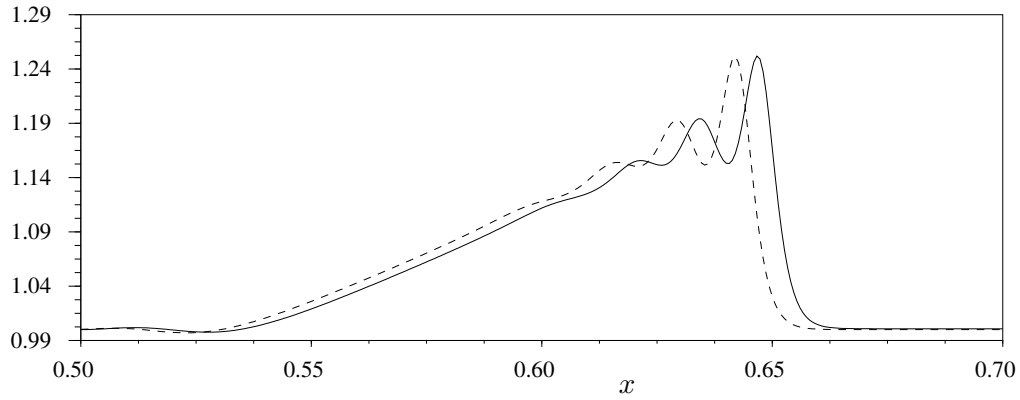


FIGURE 4.28 – Comparaison du profil réfléchi à $ft = 8$ (en traits pleins) avec le profil obtenu sans réflexion (en traits pointillés) au même instant.

4.3.3.3 Interaction non-linéaire lors d'un croisement

Maintenant que nous connaissons l'effet de la réflexion sur l'onde, il est intéressant de savoir comment se croisent deux ondes de ce type. Pour étudier le phénomène, nous effectuons là encore deux simulations : Dans la simulation I, la source émet un pulse que nous laissons se réfléchir en $x = L$, puis évoluer librement. La simulation II est identique sauf que une fois l'onde réfléchie, la source émet un deuxième pulse identique au premier, qui va croiser ainsi l'onde réfléchie. Nous comparons ensuite les pulses réfléchis des deux simulations, l'un ayant évolué librement, l'autre ayant interagi avec une deuxième onde incidente.

La figure 4.29 montre que l'effet du croisement est le même que celui de la réflexion : le profil issu du croisement est légèrement en avance par rapport à la même onde qui aurait évolué librement.

4.3.3.4 Discussion

Il apparaît d'après ces simulations que les ondes interagissent de manière non-linéaire lors de leur croisement, sans quoi elles en ressortiraient inchangées. Il est remarquable de voir que la forme de l'onde n'est quasiment pas modifiée par cette interaction, mais que sa phase l'est notablement. Cette propriété n'est pas sans rappeler le comportement de deux ondes solitaires lors de leur croisement, qui en sortent indéformées, avec juste un retard de phase. Il est visible malgré tout dans notre cas que la réflexion induit également une légère distorsion.

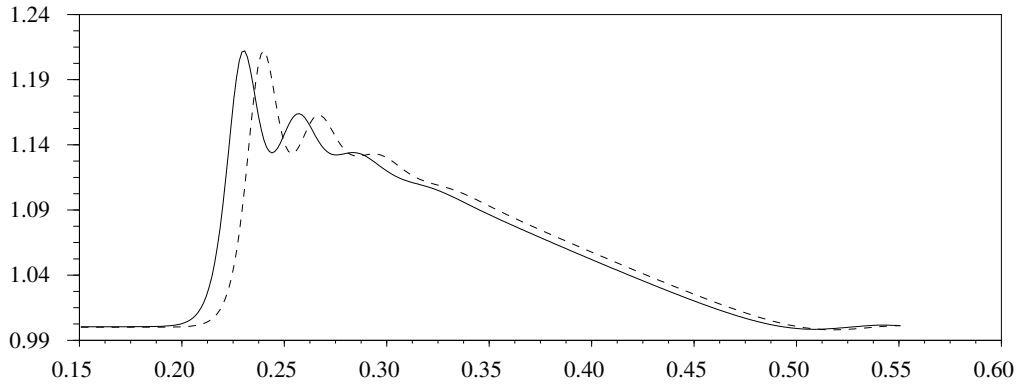


FIGURE 4.29 – Comparaison du pulse réfléchi après croisement avec un deuxième pulse incident (en traits pleins), avec le pulse réfléchi non perturbé (en traits pointillés).

Nous avons pu vérifier qualitativement en effectuant d'autres simulations que le retard de phase augmente avec les amplitudes des pulses qui se croisent. Ce résultat est logique dans la mesure où ce déphasage est un effet purement non-linéaire, mais nous n'avons pas tenté de le quantifier plus précisément.

Nous pensons que l'apparition des oscillations apériodiques observés précédemment dans les régimes d'ondes stationnaires est lié à ce déphasage lors du croisement de deux fronts d'onde. Un raisonnement simple peut être effectué sur les caractéristiques : la figure 4.30 met en évidence la propagation, la réflexion et les croisements des premières périodes de l'onde : lorsque le premier front d'onde 1 arrive sur le réflecteur, il est réfléchi avec une avance spatiale Δx. De ce fait, le front d'onde réfléchi $1'$ va croiser le deuxième front d'onde incident 2 plus tôt que prévu, avec une avance temporelle de $\Delta x/c$ où c est la vitesse de propagation du front. Ce croisement induit une nouvelle avance spatiale Δx sur les deux fronts émergents $1''$ et $2'$, et ainsi de suite. Il est clair que les collisions entre les fronts d'onde incident et réfléchi s'effectueront avec une période $T - 2\Delta x/c$, ce qui introduit donc dans le système une fréquence $1/(T - 2\Delta x/c)$ (très proche de $f = 1/T$ car $\Delta x \ll cT$, et le système oscillatoire est donc quasi-périodique.

Il s'agit là bien sûr d'un raisonnement purement qualitatif, mais faisant apparaître simplement la quasi-périodicité. La situation est encore plus complexe en réalité, car le déphasage dépend de l'amplitude des ondes qui se croisent. Comme ces ondes sont dissipatives, leur amplitude est moins élevée au voisinage du réflecteur, et l'interaction non-linéaire lors des croisements moins forte, ce qui implique que l'avance Δx dépend en fait du point de croisement sur l'axe. Nous pouvons prédire intuitivement que cette propriété implique

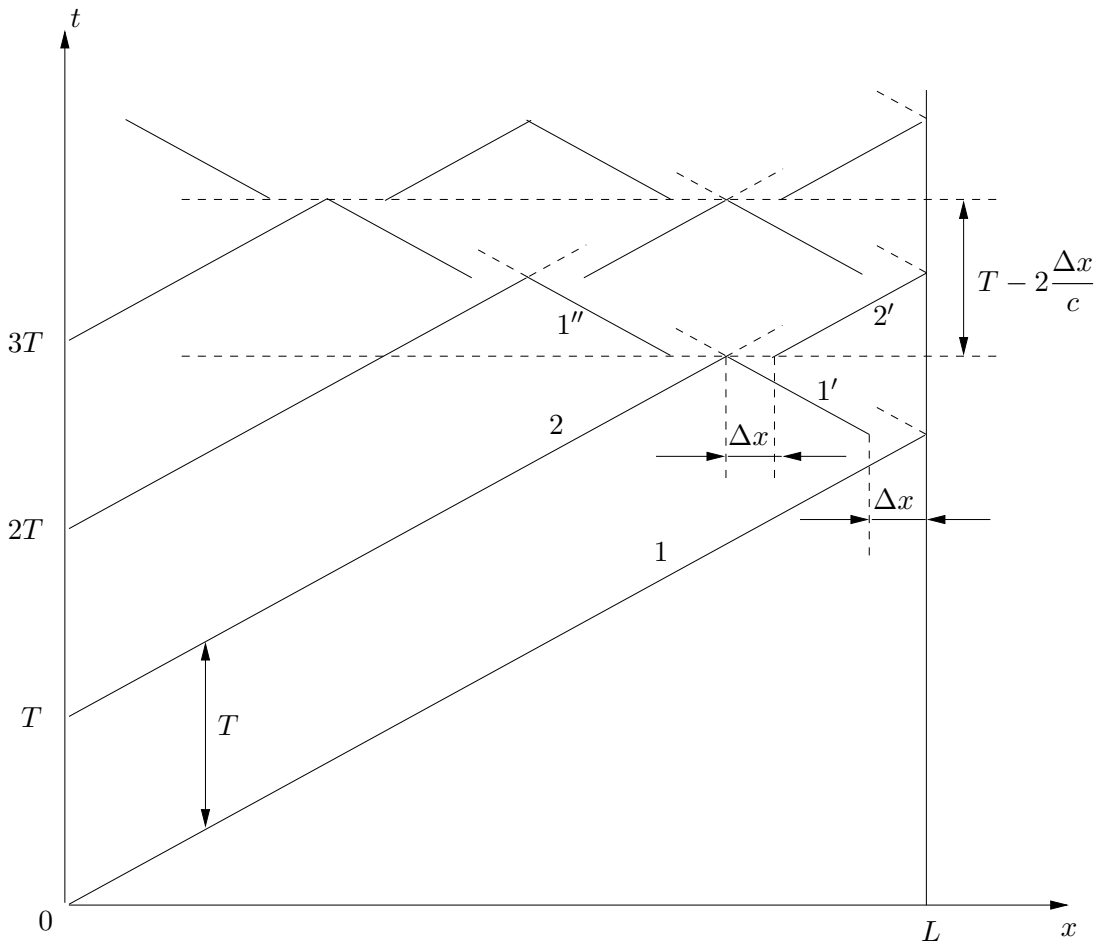


FIGURE 4.30 – Mise en évidence de l'apériodicité liée au déphasage engendré par les réflexions en $x = L$ et les croisements d'ondes.

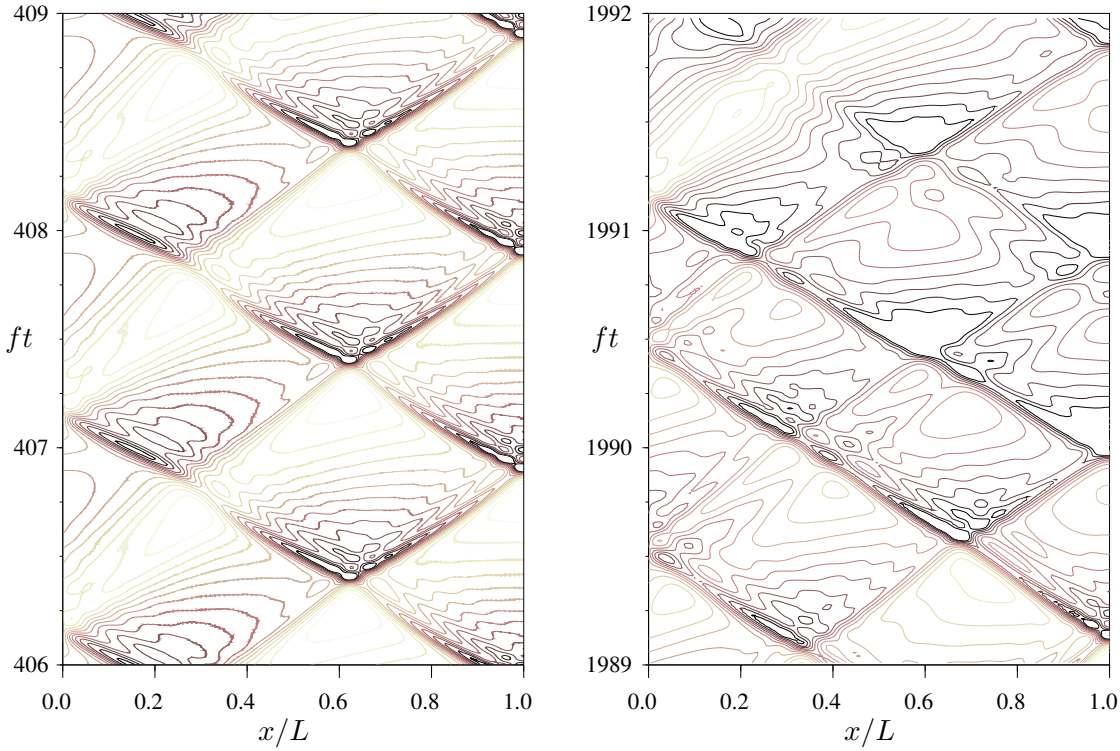


FIGURE 4.31 – Caractéristiques $p = C^{\text{te}}$ obtenues pour un régime périodique (à gauche) et un régime apériodique (à droite). Les lignes les plus foncées correspondent aux hautes pressions.

une lente dérive des différents points de croisement le long de l'axe.

En conclusion, l'apparition de régimes d'ondes stationnaires apériodique semble lié aux interactions non-linéaires entre ondes incidentes et ondes réfléchies, qui se manifestent de manière très singulière par une simple avance de phase sur les ondes émergentes. L'apparition de ce type de régime à partir d'une certaine amplitude d'excitation s'explique parfaitement par l'origine non-linéaire du phénomène.

En revanche, le fait qu'à amplitude égale, ce régime disparaît pour certaines longueurs reste tout-à-fait obscur. Avant de laisser cette propriété surprenante en suspens, nous montrons tout d'abord figure 4.31 les réseaux de caractéristiques obtenus pour des régimes respectivement périodiques et apériodiques, correspondant à des valeurs $L = 2.81$ cm et $L = 3$ cm. On voit clairement sur la figure de droite les dérives temporelle et spatiale des points de collision entre ondes incidentes et ondes réfléchies.

Afin d'étudier théoriquement cette propriété, nous suggérons la méthode suivante : si le régime est périodique, la pression $p(x,t)$ peut être décomposée en série de Fourier sur t :

$$p(x,t) = a_0(x)/2 + \sum_{i=1}^{\infty} a_n(x) e^{in\omega t} \tag{4.17}$$

et il en est de même pour la vitesse $u(x,t)$ et le rayon $R(x,t)$. En introduisant ces séries dans les équations de Caflish, une condition de périodicité pourrait peut-être être obtenue. Cela dit cette entreprise est délicate car l'équation de Rayleigh présente par exemple des termes non-linéaires en $R^{-3\eta}$ dont le développement en série de Fourier est difficile à obtenir. Une alternative est fournie par le système d'équations simplifié (2.100)-(2.101) où seule une non-linéarité quadratique est présente. Nous n'avons pas développé cette idée plus avant, mais l'approche nous semble intéressante. Pour élargir un peu la réflexion, on peut se demander si cette propriété d'apériodicité d'ondes stationnaires est rencontrée pour d'autres systèmes dispersifs non-linéaires, et sous quelles conditions.

4.3.4 Fréquences au voisinage de la fréquence $f_0/2$

Nous avons choisi d'explorer ce domaine fréquentiel, car la résonance non-linéaire 2/1 est susceptible de s'y manifester, et devrait conduire à des résultats significativement différents de la théorie linéaire.

Pour caler le rapport de fréquences f/f_0, on peut ou bien faire varier la fréquence de l'excitation, ou bien le rayon des bulles dans le milieu. Il existe bien sur une infinité de possibilités pour le choix (f, R_0), et nous avons choisi deux cas particuliers.

Pour le premier, nous fixons arbitrairement le rayon de la bulle, que nous prenons égal à 10 μm. La fréquence f correspondant à $f/f_0 = 2$ est alors de l'ordre de 130 kHz.

Pour le second, nous imposons la fréquence de l'excitation aux alentours de 20 kHz, et nous cherchons les bulles dont la fréquence de résonance vaut le double, ce qui nous donne des bulles de 80 μm.

Nous avons effectué des simulations dans ces deux cas, et nous en avons tiré essentiellement les mêmes conclusions. C'est pourquoi nous ne présenterons que les résultats pour des bulles de 10 μm.

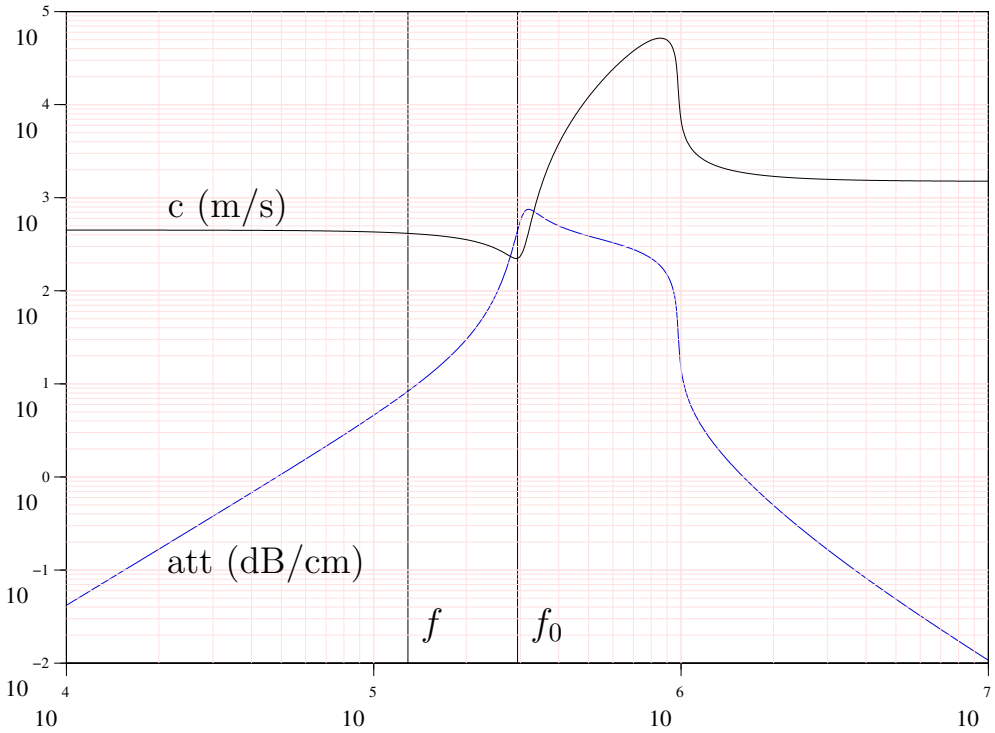


FIGURE 4.32 – Vitesse de phase et atténuation pour une bulle de 10 μm avec un taux de gaz $\beta_0 = 5.10^{-4}$. La ligne notée f correspond à $f/f_0 \simeq 0.44$.

4.3.4.1 Choix des paramètres

Nous présentons tout d'abord l'atténuation et la vitesse linéaires sur la figure 4.32. La ligne correspondant à f correspond approximativement à $f/f_0 = 0.44$, qui est la fréquence autour de laquelle nous effectuons les simulations dans cette section. Notons que dans ce domaine de fréquences l'amortissement devient significatif. Le rapport $\mathrm{Im}(k)/\mathrm{Re}(k)$ est de l'ordre de 5.10^{-2} soit un amortissement de -2.5 dB par longueur d'onde.

Pour choisir judicieusement la fréquence d'excitation, toujours dans le but de mettre en évidence des phénomènes non-linéaires, nous avons tracé un réseau de courbes semblable à la figure 1.5 de Lauterborn (1976) présentée au chapitre 1, représentant le rayon maximum atteint par une bulle seule en fonction de la fréquence, pour différentes amplitudes d'oscillation. Le résultat pour un modèle polytropique est présenté figure 4.33.a : la résonance non-linéaire 2/1 y apparaît clairement, au voisinage de f/f_0.

On notera que ces courbes diffèrent notablement de celles de Lauterborn,

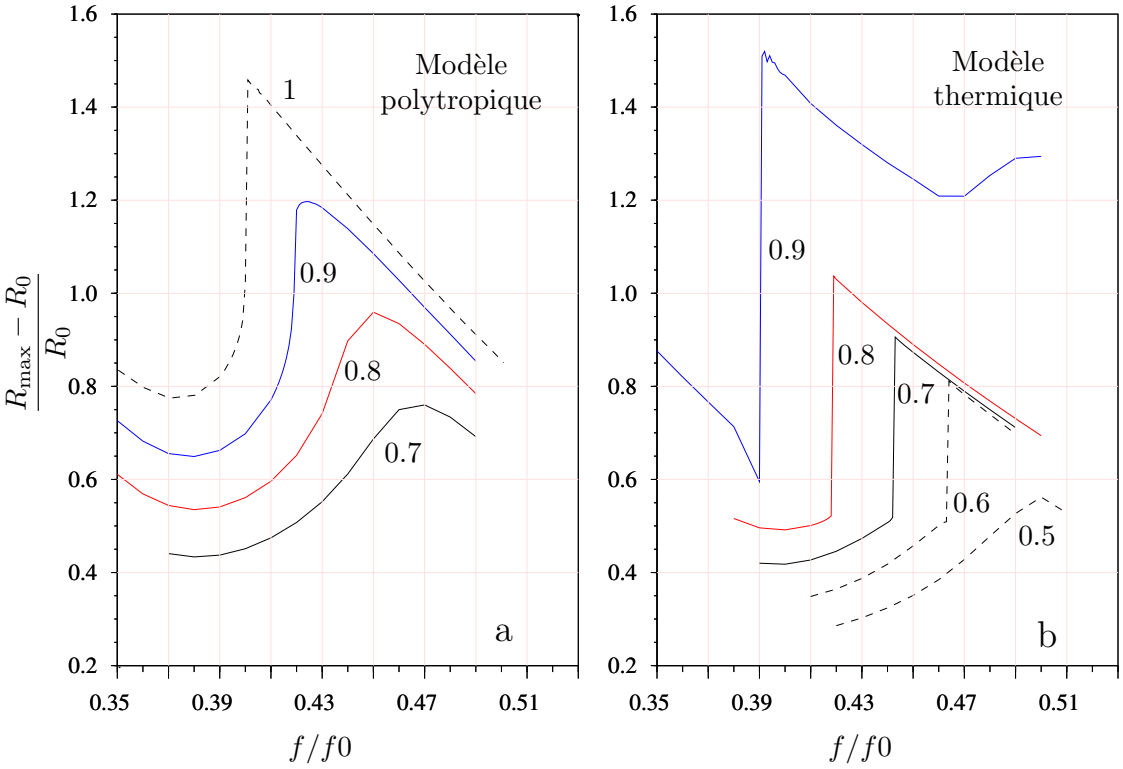


FIGURE 4.33 – Amplitude maximale des oscillations d'une bulle en fonction de la fréquence. A gauche, avec un modèle polytropique et une viscosité thermique ajoutée, à droite avec un modèle thermique complet. Les labels sur les courbes indiquent l'amplitude adimensionnelle p_a^* de la pression acoustique.

et ceci vient du fait que cet auteur a utilisé un modèle adiabatique, sans viscosité ajoutée, ce qui conduit à un amortissement moindre que dans notre cas. Pour cette raison, les «sauts» visibles sur la figure 1.5 n'apparaissent sur nos courbes que pour une excitation $p_a^* = 1$.

Comme le notent Kamath and Prosperetti (1989), les diagrammes de bifurcation obtenus avec l'approximation polytropique diffèrent notablement de ceux obtenus avec le modèle thermique complet. Nous avons donc tracé figure 4.33.b la réponse de la bulle obtenu dans ce cadre : il est clair que le diagramme obtenu est très différent, et les sauts apparaissent déjà pour $p_a^* = 0.6$.

La comparaison entre les deux figures peut nous guider vers un choix judicieux des paramètres. On voit par exemple que pour $p_a^* = 0.7$, avec le modèle thermique, les réponses de la bulle de chaque coté du saut sont très différentes l'une par rapport à l'autre, et toutes deux très différentes des réponses pour le modèle polytropique à même fréquences et même excitations. On peut donc se demander comment ces différences se répercutent sur le problème de propagation.

Pour répondre à cette question, nous avons effectué 4 simulations du modèle de Caflish où l'on impose une pression acoustique $p_a^* = 0.7$ en $x = 0$, en choisissant deux fréquences de chaque coté du saut de la figure 4.33.b (voir agrandissement figure 4.34), avec le modèle polytropique d'une part (simulations P1 et P2), et le modèle thermique complet d'autre part (T1 et T2) . Les fréquences à gauche et à droite du saut correspondent respectivement à des rapports $f/f_0 = 0.44$ et $f/f_0 = 0.445$, soient $f = 129242$ Hz et $f = 130739$ Hz.

Le taux de gaz est toujours arbitrairement fixé à 5.10^{-4}, et la longueur L du domaine est choisie égale à 2 cm, ce qui correspond à un peu plus de 6 longueurs d'onde dans le liquide à bulle.

4.3.4.2 Un phénomène inattendu

Nous présentons tout d'abord le résultat pour la simulation $P1$. L'enveloppe de l'onde obtenue est superposée à l'enveloppe linéaire figure 4.35, et l'évolution temporelle des grandeurs $p(x,t)$ et $R(x,t)$ au point noté «a» est présentée figure 4.36.

A première vue, ces grandeurs paraissent apériodiques. Pourtant, après un examen minutieux, il apparaît que ces grandeurs sont en fait périodiques

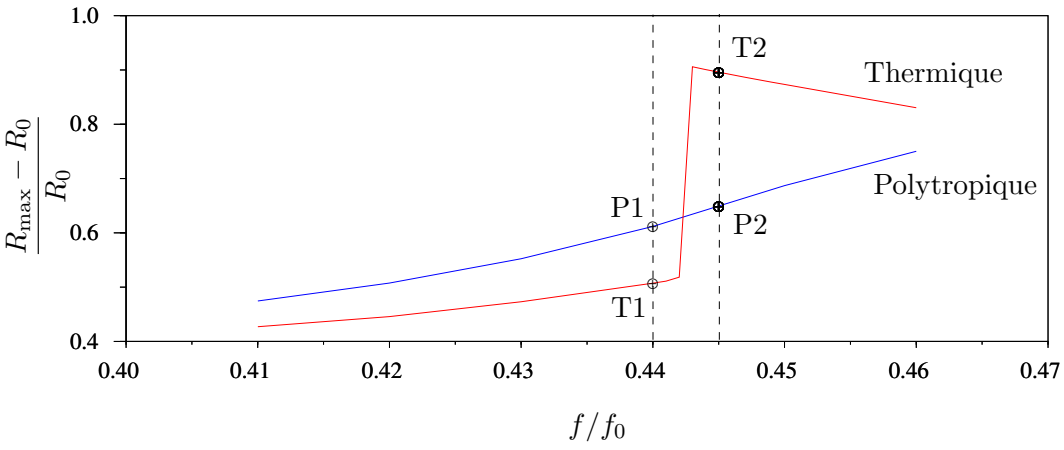


FIGURE 4.34 – Points de fonctionnement choisis pour les simulations à $p_a^* = 0.7$. Les points sur les courbes montrent les amplitudes d'oscillations de bulle prédites par les modèles polytropique et thermique.

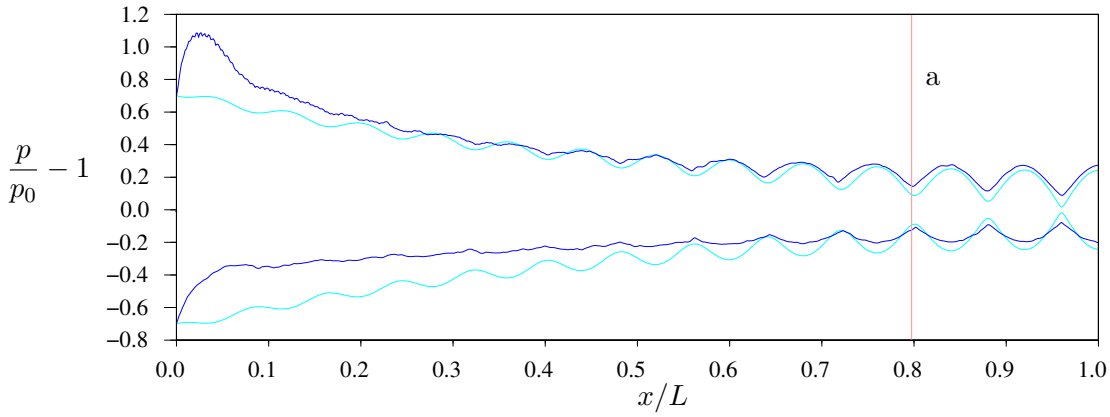


FIGURE 4.35 – Enveloppe de l'onde obtenue pour la simulation P1.

avec une fréquence $\omega/23$. Cette fréquence correspond au pic observable sur les spectres de la figure 4.36.

Nous nous sommes interrogés sur le pourquoi de cette modulation et nous proposons l'interprétation suivante : soit $k(\omega/23)$ le nombre d'onde correspondant à $\omega/23$ calculé par la relation de dispersion linéaire.

Nous avons remarqué qu'avec les paramètres choisis pour cette simulation, le produit $\mathrm{Re}(k(\omega/23))L$ était très proche de $\pi/2$, ou, si l'on préfère, la longueur du domaine L est égale à $\lambda(\omega/23)/4$, où $\lambda(\omega/23)$ est la longueur d'onde correspondant à $k(\omega/23)$. Pourquoi cette remarque ?

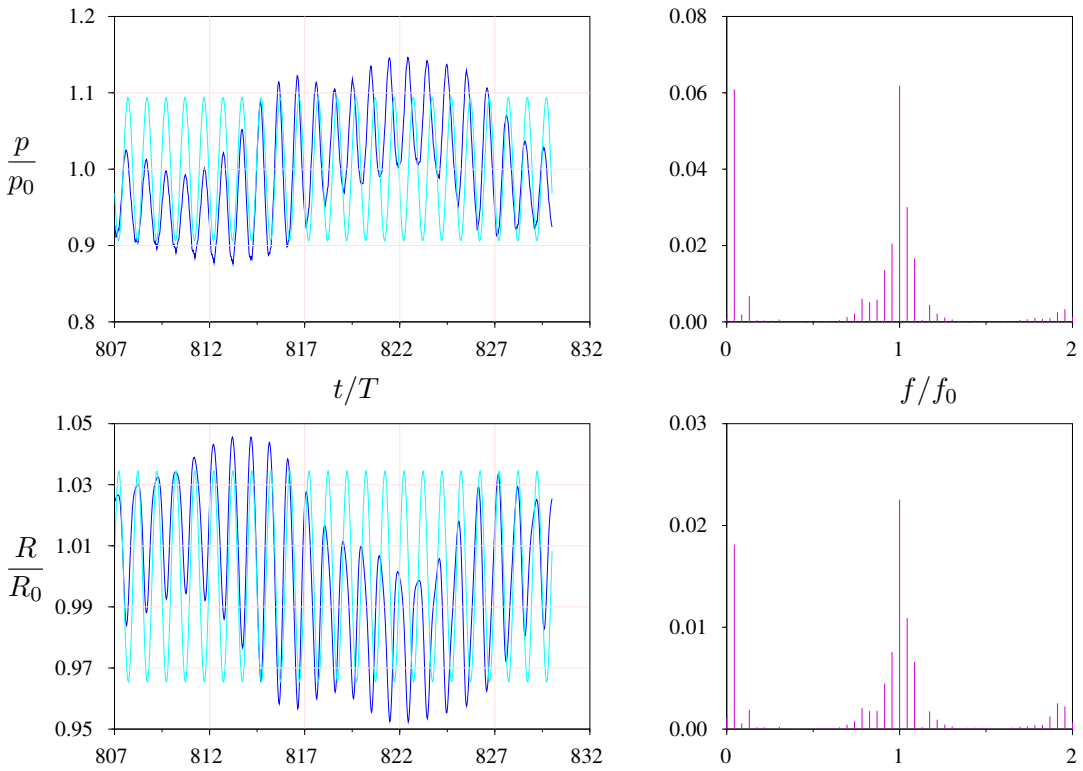


FIGURE 4.36 – Evolution temporelle de la pression et du rayon au point noté «a» sur la figure 4.35.

On peut considérer qualitativement que dans la cavité acoustique se propagent, en plus de l'onde émise par la source à la fréquence ω, plusieurs ondes à des fréquences ω_j. Ces fréquences ω_j sont bien sûr engendrées par la non-linéarité du problème, mais si nous acceptons l'existence de ces différentes fréquences dans un cadre linéaire, le principe de superposition peut être appliqué. Le potentiel de chaque onde à la fréquence ω_j contient une composante incidente en $\exp\left(ik(\omega_j)x - i\omega_j t\right)$ et une composante réfléchie en $\exp\left(-ik(\omega_j)x - i\omega_j t\right)$. L'amplitude complexe de ce potentiel est solution de l'équation de Helmholtz :

$$\frac{d^2\phi_j}{dx^2} + k(\omega_j)^2\phi_j = 0 \tag{4.18}$$

où $k(\omega_j)$ est le nombre d'onde associé à la fréquence ω_j par la relation de dispersion linéaire.

De plus, les conditions aux limites que doit vérifier ϕ_j sont
– en $x = 0$: $\phi_j = 0$

car la pression imposée en $x = 0$ par la source est à la fréquence ω, et sa composante fréquentielle à ω_j est nulle.

– en $x = L$: $\dfrac{d\phi_j}{dx} = 0$
  qui est la condition de paroi rigide.

L'équation (4.18) associée à ces conditions aux limites forme un problème aux valeurs propres, celles-ci étant définies par

$$k(\omega_j)L = n\frac{\pi}{2} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{4.19}$$

L'onde stationnaire définie par un tel $k(\omega_j)$ aurait donc une amplitude théoriquement infinie. En fait, pour k complexe, la condition (4.19) doit être exprimée sur sa partie réelle, la partie imaginaire limitant l'amplitude de l'onde à une valeur élevée mais finie.

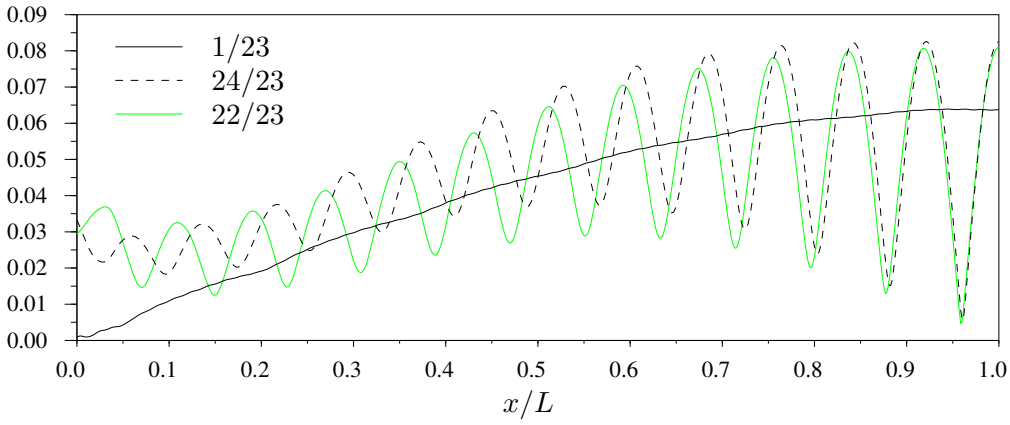
Il se trouve justement que $k(\omega/23)$ vérifie la condition (4.19), avec n=1, et parmi toutes les ondes possibles, celle ayant pour fréquence $\omega/23$ est amplifiée car son nombre d'onde rend la cavité acoustique résonante !

Dans notre simulation, le produit $k(\omega/23)L$ n'est pas tout-à-fait égal à $\pi/2$, mais l'accrochage se fait malgré tout, car parmi toutes les sous-harmoniques ω/m voisines, c'est celle-ci dont le nombre d'onde est le plus proche de $\pi/2L$.

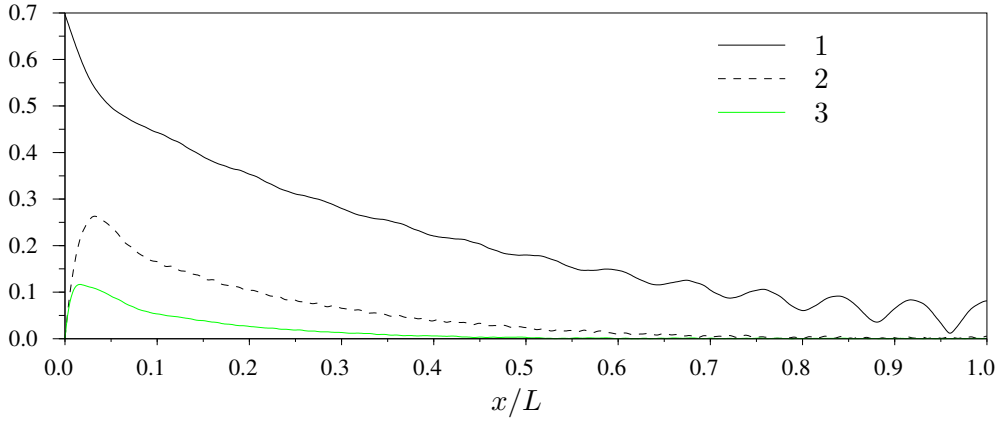
Afin de vérifier si notre interprétation est correcte, il serait intéressant de tracer l'amplitude de la sous-harmonique $\omega/23$ dans le spectre de $p(x, t)$ en fonction de x. Si notre raisonnement est juste, la longueur L devrait correspondre au quart de la longueur d'onde $\lambda(\omega/23)$, et l'on devrait observer un ventre en $x = L$, et un noeud en $x = 0$. La figure 4.37 montre que c'est bien le cas. On voit de plus sur cette figure que les fréquences $\omega + \omega/23$ et $\omega - \omega/23$ sont également présentes de manière significatives le long de x, et correspondent clairement à des interactions non-linéaires de $\omega/23$ avec la fréquence principale.

Pour confirmer la justesse de cette interprétation , nous avons effectué une simulation semblable, mais avec une longueur différente ($L = 1.83$ cm), choisie de telle sorte que la fréquence $\omega/21$ fasse résonner la cavité. On observe bien un régime périodique à la fréquence $\omega/21$.

Résumons donc notre interprétation : les non-linéarités du système sont susceptibles d'engendrer une infinité de fréquences dans un rapport rationnel avec la fréquence d'excitation f. Si parmi toutes les fréquences possibles, l'une d'entre elles a un nombre d'onde faisant résonner la cavité acoustique, elle apparaîtra de manière significative dans le spectre. Un transfert d'énergie



Harmoniques $f/23$, $f + f/23$ et $f - f/23$.



Harmoniques f, $2f$ et $3f$.

FIGURE 4.37 – Amplitude de plusieurs harmoniques de $p^*(x,t)$ en fonction de x. La figure du haut montre que la longueur du domaine correspond au quart de la longueur d'onde associée à l'harmonique $f/23$. Les deux autres harmoniques correspondent aux raies latérales de chaque coté de l'harmonique 1 engendrées par des interactions non-linéaires entre f et $f/23$. Sur la figure du bas sont présentées les harmoniques f $2f$ et $3f$ pour comparaison.

de la raie principale s'effectue donc préférentiellement vers cette fréquence, et nous pourrions qualifier ce phénomène de «sélection harmonique».

Nous pensons que ce type de phénomène n'est pas spécifique à notre problème, mais peut intervenir dans tout problème d'ondes stationnaires non-linéaires dans un milieu dispersif. Nous n'avons pas effectué de bibliographie exhaustive sur le sujet pour savoir si ce fait a déjà été mentionné, mais il serait intéressant de vérifier son caractère universel sur d'autres types d'équations

d'ondes dispersives.

Dans le cadre des liquides à bulles, il est peu vraisemblable que ce phénomène puisse être observé expérimentalement, ne serait-ce qu'à cause de la polydispersité inévitable de la population de bulles. Nous n'avons creusé cet aspect que pour interpréter les formes d'ondes obtenues, et montrer que ce qui au départ aurait pu apparaître comme un artéfact numérique, est tout-à-fait justifié par le caractère dispersif de l'onde.

Une autre conclusion intéressante peut être tirée de ce résultat : la longueur du domaine est un paramètre très important, qui intervient non seulement sur l'amplitude de l'onde stationnaire, mais aussi, de façon assez inattendue, sur son contenu fréquentiel. D'un point de vue formel, cette longueur intervient comme un paramètre supplémentaire sur le système dynamique global que constitue la cavité acoustique.

Par ailleurs, nous avions initialement pensé résoudre les équations de Caflish par une méthode de décomposition en série de Fourier des différentes grandeurs p, R et u, sous la forme

$$p(x,t) = p_0(x)e^{i\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x)e^{ik\omega t}$$

Notre résultat montre que cette approche eut été délicate, puisque la plus petit fréquence du problème est bien inférieure à la fréquence de l'excitation.

Notons que nous ne sommes pas du tout certains que les formes d'onde présentées plus haut soient stables au cours du temps. Il est tout-à-fait possible que la sous-harmonique $\omega/23$ soit elle-même modulée par une constante de temps très lente, et que pour cette raison le régime permanent ne soit pas accessible numériquement. La réponse à cette question ne peut être obtenue que de manière analytique, et nous n'avons pas cherché a y répondre faute de temps.

Nous avons pu constater que les formes d'onde obtenues pour les simulations P2, T1 et T2 étaient assez similaires à celles de la simulation P1 présentée ci-dessus, en particulier en ce qui concerne l'apparition de la sous-harmonique. Leur présentation directe ne serait donc pas d'un grand intérêt. Nous montrons en revanche que les différentes simulations produisent des résultats différents sur le plan énergétique.

4.3.4.3 Aspect énergétique

Nous nous proposons de calculer la dissipation d'énergie dans le milieu pour ces 4 simulations, en utilisant les formules de la section 2.3.3.3. En particulier, les résultats avec modèle polytropique et modèle thermique devraient présenter des différences.

Nous avons calculé la grandeur $q(x)$ définie par la formule (2.41) qui représente la puissance moyenne dissipée par unité de volume. En fait, comme nous avons ici une oscillation sous-harmonique de période mT supérieure à la période acoustique, les moyennes temporelles sont calculées sur cette période.

Il est intéressant dans un premier temps de comparer la puissance volumique dissipée q en fonction de x pour la simulation $P1$, avec celle obtenue par la théorie linéaire (figure 4.38). Cette dernière est calculée en dérivant l'expression (2.71) du chapitre 2 par rapport à x. Il apparaît clairement que la puissance dissipée obtenue numériquement est bien supérieure à celle prédite par la théorie linéaire dans une zone proche de l'émetteur, puis inférieure dans le reste du domaine. La prise en compte des effets non-linéaires prédit donc que la dissipation d'énergie est plus resserrée au voisinage de la source acoustique.

Nous comparons ensuite figure (4.39) les puissances volumiques $q(x)$ pour les quatre simulations P1, P2, T1 et T2. Les deux courbes $P1$ et $P2$ sont assez proches ce qui était prévisible d'après la figure (4.34), qui montre que les réponses des bulles pour le modèle polytropique varient continûment lorsque l'on passe de f_1 à f_2.

En revanche les deux courbes $T1$ et $T2$, correspondant à l'utilisation du modèle thermique, sont très différentes dans une zones de très faible épaisseur au voisinage de la source, puis deviennent assez semblables.

Cette différence au voisinage immédiat de la source s'explique facilement si l'on examine la figure 4.34 : deux bulles excitées respectivement à des fréquences f_1 et f_2 entreprennent des oscillations radiales d'amplitudes très différentes pour une excitation $p_a^* = 0.7$, à cause d'une bifurcation intervenant entre f_1 et f_2. Il est donc normal qu'au voisinage de la source, où $p^* \simeq 0.7$, ce comportement soit retrouvé, et comme la dissipation d'énergie par les effets thermiques croit évidemment avec l'amplitude des oscillations des bulles, il est logique que la puissance volumique dissipée au voisinage de la source soit bien plus élevée dans la simulation T2 que dans T1.

Le fait curieux est que la courbe $q(x)$ pour la simulation T2 semble discon-

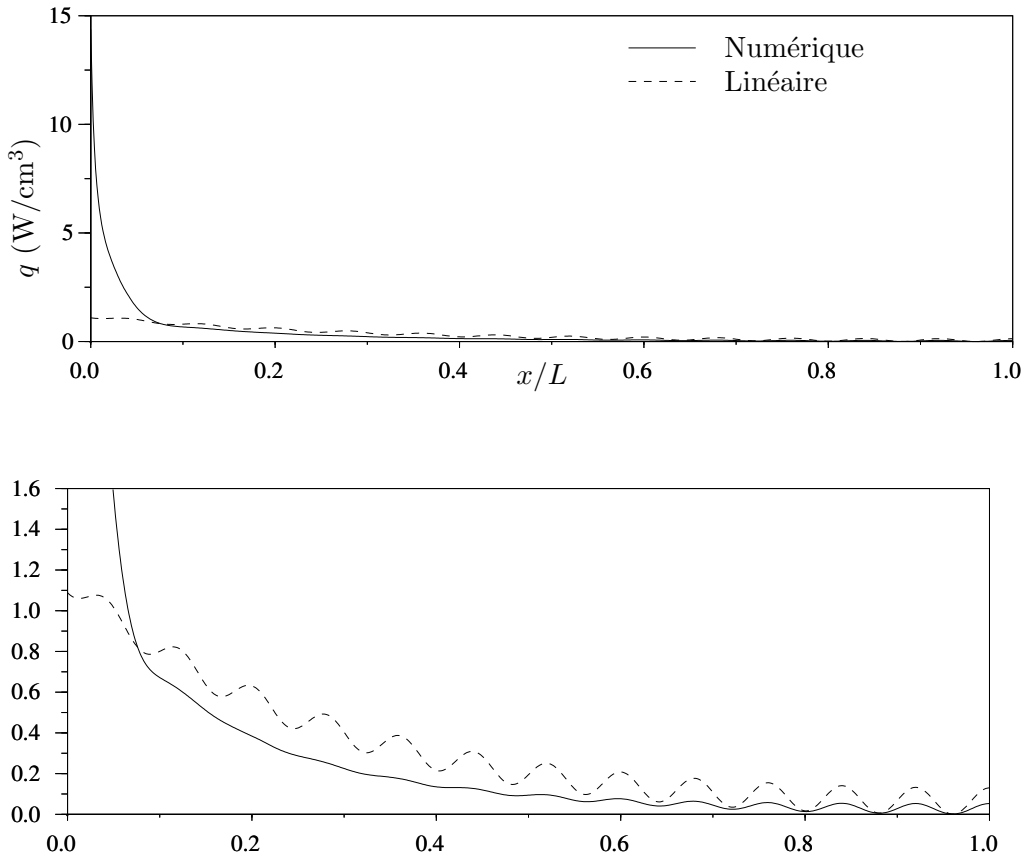


FIGURE 4.38 – Puissance volumique dissipée en fonction de la longueur : en traits pleins, obtenue numériquement pour la simulation P1, en traits pointillés, prédite par la théorie linéaire. La figure du bas est un zoom sur celle du haut.

tinue, et nous avons pu confirmer cette observation en resserrant le maillage autour de ce point. Nous y reviendrons dans la section suivante.

Il est intéressant de comparer également l'intensité acoustique au niveau de la source pour les 4 simulations, qui fournit une information sur la puissance dissipée dans l'ensemble du milieu. Le tableau 4.1 présente le résultat, ainsi que l'intensité prédite par la théorie linéaire.

Il apparaît tout d'abord que la puissance dissipée prédite par le modèle polytropique est surestimée dans tous les cas, ce qui confirme que la notion de viscosité ajoutée n'est pas appropriée pour rendre compte des pertes thermiques pour des oscillations non-linéaires.

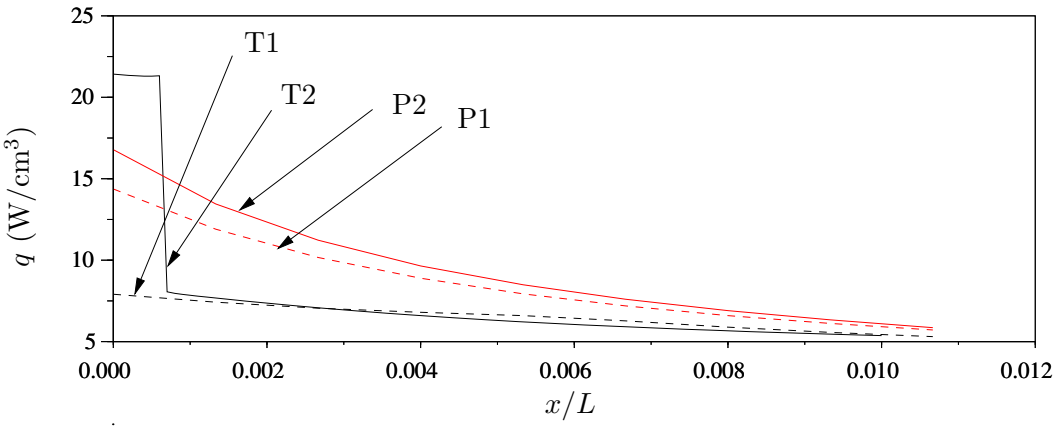


FIGURE 4.39 – Puissance volumique dissipée en fonction de la longueur pour les 4 simulations P1, P2, T1, T2 (zoom).

Simulation		P1	T1	P2	T2
Intensité	Numérique	7.903	7.363	7.970	7.770
(W/cm^2)	Linéaire	6.450		6.202	

TABLE 4.1 – Comparaison des intensités acoustiques au niveau de la source pour les quatre simulations P1, P2, T1, T2

De plus, la théorie linéaire sous-estime l'intensité acoustique d'environ 15 à 20%.

4.3.4.4 Influence de la résonance non-linéaire sur le profil

Nous revenons ici sur le saut observé sur la courbe $q(x)$ pour la simulation T2, qui s'interprète aisément en examinant la dynamique de la bulle lorsque l'on prend en compte les effets thermiques.

La figure 4.40 montre l'amplitude d'oscillation d'une bulle seule excitée à la fréquence de la simulation T2 en fonction de l'amplitude d'excitation p_a^* : les variations de ce paramètre engendrent une bifurcation autour de $p_a^* = 0.67$. Lorsque l'on s'éloigne de la source, la pression acoustique diminue, et l'on se déplace approximativement sur la courbe 4.40 de la droite vers la gauche, en partant de $p_a^* = 0.7$. La discontinuité de la courbe $q(x)$ observée figure (4.39) correspond donc au passage de la bifurcation.

Une confirmation de cette interprétation est obtenue en examinant figure 4.41 les réponses temporelles des bulles pour la simulation T2, aux deux noeuds entourant la discontinuité de la figure 4.39 : il est clair que les amplitudes lues sur ce graphique correspondent aux amplitudes de chaque coté du saut de la figure (4.40).

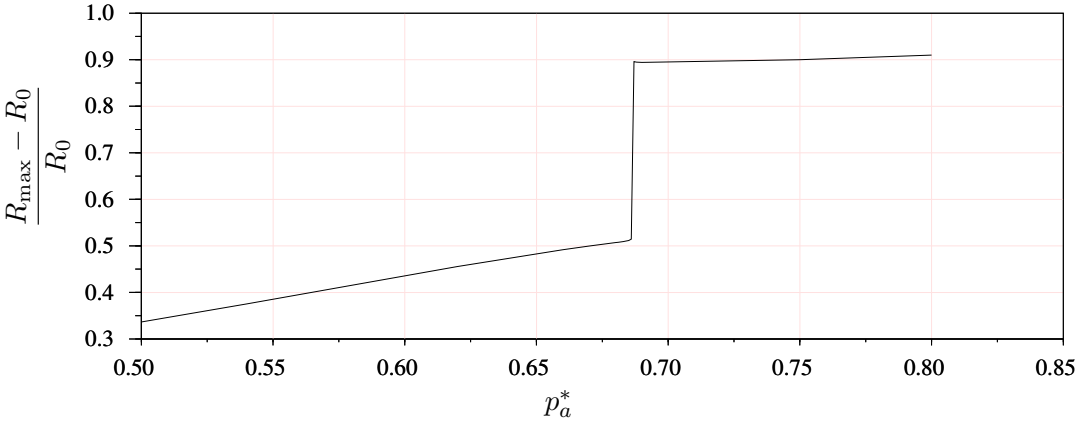


FIGURE 4.40 – Amplitude maximale des oscillations d'une bulle de 10 μm excitée à la fréquence $f/f_0 = 0.445$, en fonction de l'amplitude de la pression acoustique, prédite par le modèle thermique.

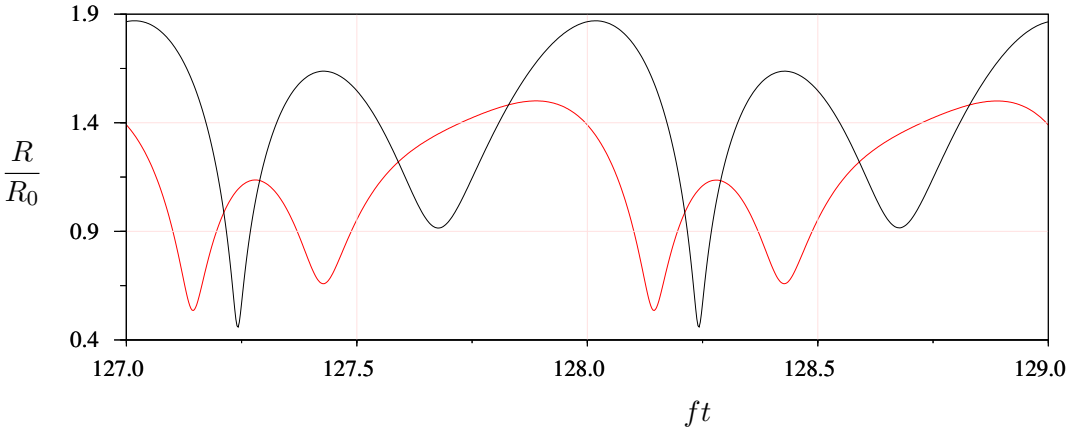


FIGURE 4.41 – Evolution temporelle du rayon de chaque coté de la discontinuité de la figure 4.39 pour la simulation T2.

Bien que prévisible en raison du caractère non-linéaire du problème, ce phénomène est malgré tout assez troublant. Il s'agit d'une propriété inhérente au modèle de Caflish, et plus généralement à tout modèle faisant intervenir une équation de dynamique de bulles.

4.4 Conclusion

Notre objectif était de mettre en évidence par simulation les conséquences de la non-linéarité du modèle de Caflish sur un problème de propagation d'ondes.

Dans un premier temps, en simulant la propagation d'ondes progressives, nous avons confirmé les résultats analytiques obtenus au chapitre 2, et montré les limites de validité de la réduction du modèle de Caflish à une équation de Korteweg-de Vries-Burgers.

A cette occasion, nous avons également montré que l'amortissement spatial croît avec l'amplitude de la source. Cet effet direct de l'amplitude de l'onde sur son amortissement ne pouvait être mis en évidence que dans un cadre non-linéaire, et va dans le sens de l'observation selon laquelle les ultrasons de puissance sont fortement amortis au voisinage de l'émetteur.

Dans le cadre de régimes d'ondes stationnaires, nous avons conduit le calcul dans deux cas distincts : lorsque la fréquence acoustique est très inférieure à la fréquence de résonance des bulles f_0, et lorsqu'elle est au voisinage de $f_0/2$, cette région étant susceptible de produire des effets non-linéaires remarquables.

Pour des fréquences basses, nous avons montré que les effets non-linéaires interviennent même pour des amplitudes très faibles de l'onde, et se traduisent par une distorsion du profil, conséquence de celle observée sur les ondes progressives. Un deuxième phénomène remarquable est l'apparition de régimes apériodiques, dépendant fortement de la longueur du domaine. Nous avons pu montrer qualitativement que l'apériodicité est liée essentiellement à l'interaction non-linéaire entre ondes incidentes et ondes réfléchies, mais la dépendance du phénomène par rapport à la longueur du domaine reste inexpliqué.

Les résultats de simulation pour des fréquences au voisinage de $f_0/2$ ont également mis en évidence plusieurs phénomènes non-linéaires.

Tout d'abord sur le plan de la dynamique du système, nous avons pu montrer que dans tout les cas, les grandeurs pression et rayon subissaient une modulation par une fréquence sous-harmonique f/m très basse dont la longueur d'onde fait résonner la cavité acoustique.

Sur un plan plus physique, nous avons montré que la répartition spatiale de la puissance dissipée dans le milieu est très différente de celle prédite par la

théorie linéaire. Sur l'ensemble du milieu, cette puissance dissipée est plus élevée, mais surtout, il appert que la dissipation d'énergie s'effectue essentiellement au voisinage de la source, où les effets non-linéaires sont les plus importants. De plus, la comparaison entre l'utilisation du modèle polytropique et du modèle thermique complet montre que le premier surestime la dissipation d'énergie. Ce résultat vient confirmer la non-adéquation du modèle polytropique au voisinage des résonances non-linéaires.

Enfin, nous avons montré comment se répercutent les bifurcations des oscillations de la bulle au voisinage de $f/f_0 = 1/2$ sur le problème de propagation : le saut d'amplitude d'oscillation d'une bulle à la traversée de cette bifurcation provoque une discontinuité sur le profil spatial des rayons de bulles. Sur le plan physique, cette propriété curieuse impliquerait l'existence d'une frontière nette, séparant des bulles oscillant de manière radicalement différentes. On peut se demander si ce comportement remet en cause ou non les hypothèses de validité du modèle. Quoi qu'il en soit, il est remarquable de constater que la méthode numérique reste valable dans ce cas, en raison de la formulation intégrale utilisée.

Les résultats obtenus dans ce chapitre mettent donc clairement en évidence plusieurs effets non-linéaires remarquables. Leur occurrence était prévisible au vu de la non linéarité de la bulle de cavitation, mais nos résultats de simulation montrent plus précisément sous quelles formes ils peuvent se manifester.

La richesse de ces phénomènes et la difficulté à les interpréter, ne serait-ce que dans une géométrie monodimensionnelle, confirment que ce dernier choix était suffisant dans une première approche.

Chapitre 5

Modélisation de l'évolution du champ de bulles

5.1 Introduction

5.1.1 Approche proposée

Dans les deux chapitres précédents, nous avons tenté de mettre en évidence les conséquences de la non-linéarité des oscillations de la bulle sur le phénomène de propagation. En raison de la difficulté du problème non-linéaire, nous avons du supposer non seulement que toutes les bulles possédaient le même rayon et étaient réparties uniformément dans le liquide, mais de plus, il nous a fallu définir arbitrairement le rayon de ces bulles, ainsi que leur nombre par unité de volume.

Si cette hypothèse est acceptable pour un système où les bulles sont créées artificiellement, il va de soi que dans une expérience de cavitation, les deux grandeurs rayon et nombre de bulles sont a priori des inconnues du problème. On peut remarquer très simplement qu'au repos, aucune bulle n'est visible à l'oeil nu dans le liquide, et que dès la mise en route des ultrasons, un nuage de bulles apparaît au voisinage de la source.

Cette remarque suggère que la population de bulles apparaît spontanément sous l'influence de l'onde acoustique, et qu'elle doit être considérée comme une fonction de cette dernière plutôt que comme une donnée. Réciproquement, comme nous l'avons montré dans les précédents chapitres, la présence des bulles affecte la propagation de l'onde acoustique.

On pressent donc qu'un champ de cavitation acoustique résulte d'un couplage entre les évolutions de l'onde acoustique et de la population de bulles, et qu'un éventuel modèle décrivant le phénomène dans sa globalité serait constitué de deux équations, l'une décrivant l'action des bulles sur l'onde acoustique, l'autre celle de l'onde acoustique sur la population de bulles.

Ce chapitre a été motivé initialement par une publication de **?** qui suggère que l'influence de l'onde acoustique sur la population de bulles peut être reliée à deux phénomènes majeurs : les variations de la quantité de gaz contenue dans la bulle, ou si l'on préfère les variations de son rayon d'équilibre, et le déplacement des bulles dans le liquide.

A titre d'introduction, et pour entrevoir la singularité des effets d'une onde acoustique par rapport au sens commun, remarquons qu'une bulle de gaz dans un liquide saturé ou sous-saturé en gaz dissous suit naturellement deux tendances :

- elle se dissout dans le liquide sous l'influence de la tension superficielle
- elle remonte à la surface sous l'influence de la poussée d'Archimède.

La présence d'un champ acoustique peut contrebalancer, voire inverser ces deux phénomènes : premièrement, au lieu de se dissoudre, une bulle peut au contraire prélever du gaz dissous dans le liquide et augmenter sa masse de gaz, l'onde acoustique agissant en quelque sorte comme une pompe. Cet effet, appelé *diffusion rectifiée* intervient à partir d'un certain seuil de pression acoustique pour lequel la tendance naturelle à la dissolution est juste équilibrée.

Deuxièmement, le champ acoustique consistant en une accélération alternative du fluide, exerce une force appelée *force de Bjerknes primaire* sur la bulle. A cause des oscillations de volume de la bulle, cette force est à moyenne non nulle et peut éventuellement s'opposer à la poussée d'Archimède, et de manière générale provoque la mise en mouvement des bulles par rapport au liquide.

A eux seuls, ces deux phénomènes justifient la polydispersité, la non-uniformité et la non-stationnarité de la population de bulles.

A ces deux effets, il convient ensuite d'ajouter le phénomène de coalescence, qui est favorisé par l'existence d'une force attractive entre des bulles oscillant en phase, appelée *force de Bjerknes secondaire*. Cet effet a été mis en évidence expérimentalement, et doit être pris en compte dans la mesure où comme nous le verrons, les bulles inférieures à la taille de résonance se concentrent aux ventres d'une onde stationnaire sous l'effet de la force de Bjerknes primaire.

Enfin, un dernier effet souvent mentionné dans les observations expérimentales est susceptible de modifier la population de bulles : la fragmentation. Cette dernière intervient tout d'abord pour les bulles instables à la fin de la phase d'implosion, mais aussi pour des bulles stables par un mécanisme d'amplification paramétrique.

Si l'on admet que :
- l'action de l'onde acoustique sur la population de bulles se résume aux quatre phénomènes : diffusion rectifiée, migration sous l'influence des forces primaires de Bjerknes, coalescence sous l'influence des forces secondaires de Bjerknes, et fragmentation,
- chaque phénomène pris individuellement est quantifiable analytiquement,

il est concevable de résumer l'ensemble dans une équation de bilan du nombre de bulles. L'objectif ultime de ce chapitre est l'écriture de cette équation.

Dans cette optique, nous tenterons dans les quatre premières sections de ce chapitre de quantifier séparément les quatre phénomènes mentionnés.

Les principaux résultats disponibles dans la littérature sur la diffusion rectifiée seront examinés dans la section 5.2.

Dans la section 5.3, nous montrerons l'origine hydrodynamique de la force primaire de Bjerknes, et examinerons les autres forces qui s'exercent sur une bulle en mouvement. En négligeant la masse de la bulle, la loi de la dynamique fournira la vitesse relative entre la bulle et le liquide comme la solution d'une équation différentielle non-linéaire. Une solution approchée de cette équation sera obtenue par une méthode des échelles multiples, et fournira ultimement la vitesse de translation moyenne d'une bulle dans un champ acoustique de forme donnée. La méthode utilisée permettra d'examiner la validité d'un résultat couramment employé dans la littérature.

La section 5.4 présentera les résultats disponibles dans la littérature sur les forces de Bjerknes secondaires. Dans le cas où cette force est attractive, Alekseev and Yushin (1986) ont déterminé une fréquence moyenne de collisions entre bulles, afin de quantifier le phénomène de coalescence. Nous reprendrons le résultat de ces auteurs, après avoir corrigé ce qui nous semble être une erreur.

Le phénomène de fragmentation sera examiné dans la section 5.5, en séparant la fragmentation issue de l'implosion d'une bulle et celle résultant d'une amplification paramétrique d'oscillations de surface pour des bulles stables. La littérature étant assez pauvre dans ce domaine, nous suggérerons des valeurs pour les seuils de fragmentation ainsi que pour le nombre de bulles issues de

la fragmentation.

La section 5.6 rassemblera ces résultats dans une équation de conservation du nombre de bulles, qui décrit l'action de l'onde sur la population de bulles. L'équation de propagation linéaire découlant du modèle de Caflish, matérialisant l'action des bulles sur l'onde sera également rappelée pour fermer le système. La difficulté inhérente à la résolution de ce système d'équations sera ensuite discutée.

5.1.2 Rappel et notations

Dans le cadre linéaire, nous supposerons que la pression macroscopique $p(x,t)$ intervenant dans le modèle de Caflish est en tout point du milieu une grandeur sinusoïdale. Nous noterons donc cette pression sous la forme

$$p(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}P(\mathbf{x})\exp\left(-i\omega t\right) + \text{c.c.} \tag{5.1}$$

$P(\mathbf{x})$ étant une amplitude complexe dépendant des coordonnées $\mathbf{x}$ du point considéré.

On considérera, conformément aux hypothèses du modèle de Caflish, que les bulles situées autour du point macroscopique $\mathbf{x}$ oscillent comme si elles étaient seules en milieu infini, et voyaient à l'infini la pression $p(\mathbf{x},t)$ définie ci-dessus.

Sauf mention contraire, nous considérerons que ces bulles oscillent de manière linéaire, et que leur rayon $R(\mathbf{x},t)$ s'écrit

$$R(\mathbf{x},t) = R_0\left(1 + \frac{1}{2}X(\mathbf{x})\exp\left(-i\omega t\right) + \text{c.c.}\right) \tag{5.2}$$

X et P étant reliés par (voir chapitre 1) ;

$$X = -\frac{1}{\rho R_0^2}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega}\,P \tag{5.3}$$

On notera par la suite

$$\alpha = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega} \tag{5.4}$$

$$\gamma = \frac{1}{\rho R_0^2}\alpha \tag{5.5}$$

5.1.3 Caractérisation de la population de bulles

Nous définirons la population de bulles par une fonction de distribution de taille $N(R_0, \mathbf{x}, t)$ telle que $N(R_0, \mathbf{x}, t)\, dR_0$ est le nombre de bulles total dont le rayon d'équilibre est compris dans l'intervalle $[R_0, R_0 + dR_0]$, au point macroscopique $\mathbf{x}$, à l'instant t.

5.2 Diffusion rectifiée

5.2.1 Approche intuitive

Considérons une bulle de gaz au repos, suffisamment petite pour que sa vitesse ascensionnelle soit nulle, isolée dans un milieu liquide infini, sous-saturé ou saturé en gaz (nous entendons par cette dénomination un liquide en équilibre chimique avec une atmosphère gazeuse à la pression p_0, de laquelle il est séparé par une interface plane).

La pression du gaz à l'intérieur de la bulle est toujours supérieure à la pression dans le liquide, à cause de la tension superficielle, et pour compenser ce déséquilibre, le gaz contenu à l'intérieur de la bulle doit diffuser vers le liquide : la bulle se dissout.

En présence d'un champ acoustique induisant des oscillations radiales de la bulle, ce phénomène peut s'inverser : au lieu de se dissoudre, la bulle peut augmenter sa masse de gaz interne en prélevant ce dernier au liquide.

Ce processus appelé *diffusion rectifiée*, résulte de deux phénomènes concourants. Notons tout d'abord que pour restaurer l'équilibre chimique, le gaz doit diffuser de l'intérieur de la bulle vers le liquide lors d'une phase de contraction, et dans le sens inverse lors d'une phase de détente. S'il y avait symétrie complète entre les deux phases, la quantité de gaz échangée sur une période serait nulle.

La première cause de dissymétrie entre les deux phases est liée à la surface d'échange, qui varie en R^2. Dans la phase de contraction (figure 5.1), la surface de la bulle est plus petite que lors de la phase de détente, si bien qu'en moyenne sur une période, il rentre un peu plus de gaz dans la bulle qu'il n'en sort. Cet effet est appelé usuellement *effet de surface*.

D'autre part, le flux de gaz à travers la surface de la bulle est proportionnel au gradient de concentration au voisinage de cette surface. A cause de la symétrie

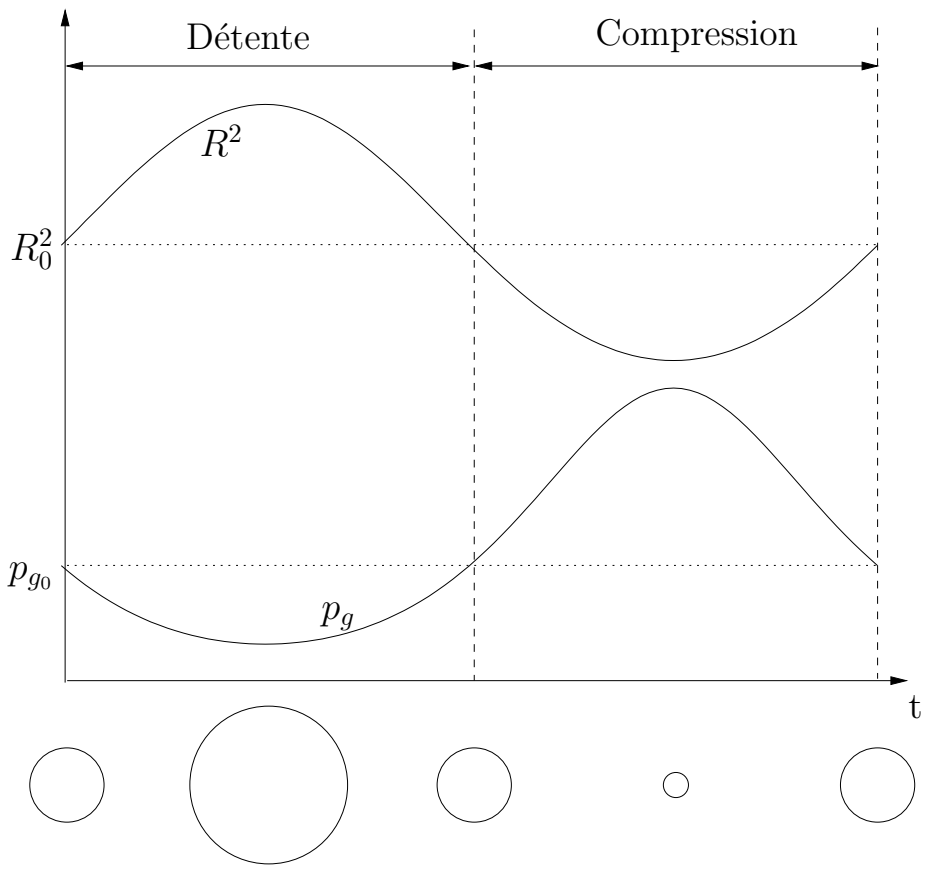


FIGURE 5.1 – Effet de surface dans la diffusion rectifiée

sphérique du problème, ce gradient de concentration est plus important dans la phase de détente que dans la phase de compression.

En effet, lorsque la bulle est à son rayon d'équilibre R_0, considérons une fine couche de liquide comprise entre la bulle et la sphère de rayon $R_0 + r_0$ (figure 5.2). Cette couche de liquide occupe un volume $\simeq 4\pi R_0^2 r_0$. Si l'on suppose le liquide incompressible le volume de cette couche est conservé, et son épaisseur $r = r_0(R0/R)^2$ sera plus fine dans la phase de détente que dans la phase de compression. De ce fait le gradient de concentration au voisinage de la bulle sera plus important dans la phase de détente. Ce phénomène, dit *effet de couche*, est intimement lié au mouvement radial du liquide autour de la bulle.

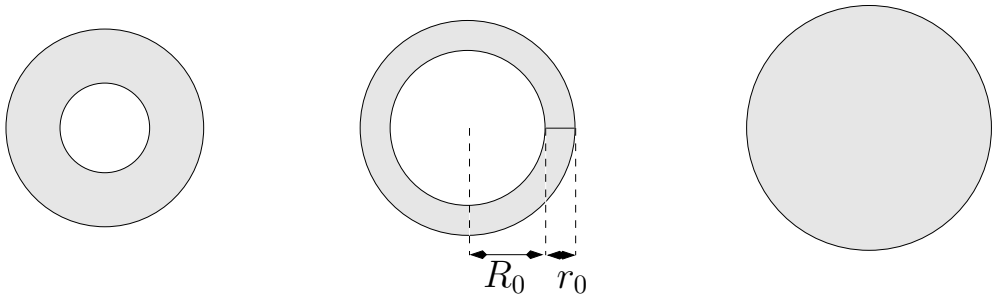


FIGURE 5.2 – Effet de couche dans la diffusion rectifiée

Notons enfin que le comportement naturel d'une bulle étant la dissolution, il est prévisible que sa croissance par diffusion rectifiée apparaisse à partir d'un certain seuil pour la pression acoustique.

5.2.2 Bibliographie

La première approche théorique du problème a été effectuée par Blake (1949b), dans le cadre d'oscillations linéaires et d'un comportement isotherme de la bulle. L'auteur ayant négligé le transport de gaz par convection, obtient une solution ne tenant pas compte de l'effet de couche.

Hsieh and Plesset (1961) reprennent le problème dans les mêmes conditions en prenant en compte le transport de gaz lié au mouvement du liquide. Strasberg (1961), en comparant ses mesures du seuil de diffusion rectifiée à ces deux théories confirme le bien-fondé de l'approche de Hsieh et Plesset.

Eller and Flynn (1965) développent une théorie plus générale, sans aucune hypothèse sur la linéarité des oscillations et obtiennent l'expression géné-

rale de la vitesse de croissance d'une bulle isotherme, sous réserve que son comportement dynamique $R(t)$ soit connu. La simplification de leur théorie dans le cadre linéaire fournit une expression analytique du seuil de diffusion rectifiée.

Les mesures effectuées par Eller (1972) dans un champ acoustique de 11 kHz montrent un bon accord avec la théorie de Eller et Flynn en ce qui concerne le seuil de diffusion rectifiée. En revanche, les vitesses de croissance mesurées sont bien supérieurs à ceux prévus par la théorie. Cette différence est interprétée ultérieurement par Gould (1974) : l'apparition d'ondes de surface sur la bulle favoriserait encore plus le transfert de gaz à l'interface.

Le travail expérimental de Crum (1980) montre que les seuils et les taux de croissance mesurés sont en fait en bon accord avec la théorie (voir figure 5.5 à la fin de cette section) pour de l'eau très pure. En revanche, l'auteur montre que l'ajout de tensioactifs en faible quantité produit un écart significatif, à la fois sur le taux de croissance et sur le seuil de diffusion rectifiée, et ce même en l'absence d'instabilités de surface. Crum (1980) conclut en suggérant que la présence de tensioactifs modifie fondamentalement le processus de diffusion rectifiée.

Plus récemment, Fyrillas and Szeri (1994) ont dérivé une nouvelle formulation théorique plus rigoureuse, en apportant un soin particulier aux conditions sur la concentration en gaz dissous au voisinage de la surface de la bulle. Grâce à la méthodologie employée, les auteurs peuvent prendre en compte des conditions d'interface modifiées par la présence d'une fine couche de tensioactifs autour de la bulle Fyrillas and Szeri (1995). Les vitesses de croissance théoriques obtenues sont beaucoup plus proches de la réalité, ce qui confirme la suggestion formulée par Crum (1980).

5.2.3 Grandes lignes de la mise en équation

L'ensemble des équations régissant le problème serait

- Les équations de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie) dans le gaz
- Les équations de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie) dans le liquide
- Une équation de diffusion du gaz dans le liquide
- Les conditions aux limites en $r = +\infty$
- Les conditions de continuité à la surface de la bulle

– Des équations d'état du gaz et du liquide

L'hypothèse majeure commune à tous les développements théoriques précités est que l'influence du transport de gaz sur le mouvement instantané de la bulle est négligeable. Ceci permet de découpler le problème de l'oscillation de la bulle de celui de la diffusion du gaz, et de décrire son mouvement par exemple par l'équation de Rayleigh, que nous rappelons

$$R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\rho}\left[p_g - \frac{2\sigma}{R} - 4\mu\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} - p0(1 - P\sin(\omega t))\right] \tag{5.6}$$

L'équation de diffusion du gaz dans le liquide s'écrit

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}.\boldsymbol{\nabla} c = D\nabla^2 c \tag{5.7}$$

où v est la vitesse dans le liquide, qui sous l'hypothèse incompressible s'écrit $v_r = R^2\dot{R}/r^2$. L'équation de diffusion devient donc

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \dot{R}\frac{R^2}{r^2}\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{D}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial C}{\partial r}\right) \tag{5.8}$$

L'équation de Rayleigh (5.6) et (5.8) sont couplées de deux manières. Tout d'abord, le terme convectif dans l'équation de diffusion dépend de la vitesse radiale de la bulle. Ensuite, la pression gaz dans l'équation de Rayleigh est reliée au nombre de moles de gaz dans la bulle.

A ces deux équations, il convient d'associer des conditions aux limites et initiales pour la concentration en gaz. On note c_i la concentration initiale en gaz dans le liquide, et on suppose que cette grandeur représente également la concentration infiniment loin de la bulle au cours des oscillations.

$$c(r,0) = c_i \tag{5.9}$$

$$\lim_{r\to\infty} c(r,t) = c_i \tag{5.10}$$

Une deuxième condition aux limites pour c est obtenue en $r = R(t)$ en écrivant l'équilibre chimique à la surface de la bulle à l'aide de la loi de Henry

$$c(R(t),t) = k^{-1}p_g(t) \tag{5.11}$$

où k est la constante de Henry.

5.2.4 Résolution

Les deux difficultés majeures inhérentes à la résolution du système d'équations (5.6), (5.8), (5.9), (5.10) et (5.11) sont :
- la condition aux limites (5.11), qui s'applique à une limite mobile au cours du temps.
- l'équation de Rayleigh d'une part, et l'équation de diffusion d'autre part, qui sont non-linéaires.

Les travaux de Eller and Flynn (1965), améliorés par Crum (1980); Crum and Hansen (1982) ont longtemps fait référence dans le domaine, et conduisent à une expression simple des variations du rayon moyen de la bulle :

$$\frac{dR_0}{dt} = \frac{D\mathcal{R}T_0}{k}\frac{1}{R_0}\left(1+\frac{4\sigma}{3p_0R_0}\right)^{-1}\left[A+R_0\left(\frac{B}{\pi Dt}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\frac{c_i}{c_0}-\frac{C}{B}\right) \tag{5.12}$$

où les grandeurs A, B et C sont données par

$$A = \left\langle \frac{R}{R_0} \right\rangle \tag{5.13}$$

$$B = \left\langle \left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \right\rangle \tag{5.14}$$

$$C = \left\langle \left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \left(\frac{p_g}{p_0}\right) \right\rangle \tag{5.15}$$

l'opérateur $< . >$ représentant la moyenne temporelle sur une période d'oscillation. La concentration de saturation c_0 est celle qui existerait dans le liquide séparé par une surface plane d'une atmosphère gazeuse à la pression d'équilibre p_0, soit $c_0 = p_0/k$.

Il est clair d'après cette expression que la bulle grossit si le terme $c_i/c_0 - C/B$ est positif, et qu'elle diminue dans le cas contraire. Le seuil de diffusion rectifiée est donc défini par la relation

$$\frac{c_i}{c_0} - \frac{\left\langle \left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \left(\frac{p_g}{p_0}\right) \right\rangle}{\left\langle \left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \right\rangle} = 0 \tag{5.16}$$

qui fournit une relation implicite sur la pression acoustique P et le rayon R_0.

Remarquons que cette expression est obtenue sans hypothèses sur l'amplitude des oscillations de la bulle. Cela signifie que des grandeurs $R(t)$ obtenues par

simulation d'une équation de dynamique de bulle peuvent être introduites dans cette expression. Cette approche a été envisagée par Eller and Flynn (1965); Church (1988), et plus récemment Fyrillas and Szeri (1994).

Nous reviendrons sur cette possibilité ultérieurement, et examinons maintenant ce résultat dans le cadre d'oscillations de faibles amplitudes.

5.2.5 Hypothèse linéaire

Si l'on s'intéresse à des oscillations sinusoïdales de faible amplitude, il est possible de linéariser l'équation de Rayleigh et d'en obtenir une solution analytique sans recourir à la simulation numérique. Dans ce cas, les moyennes A, B et C peuvent s'exprimer également de manière analytique.

Selon Crum and Hansen (1982), une solution linéaire de l'équation de Rayleigh peut être obtenue sous la forme

$$\frac{R}{R_0} = 1 - \mathrm{Re}\,(\gamma P e^{-i\omega t}) + |\gamma|^2 C_2 P^2 + \text{harmoniques} \tag{5.17}$$

l'originalité de cette expression par rapport à la linéarisation usuelle de l'équation de Rayleigh résidant dans le terme d'ordre 2 constant, dont l'influence sur les moyennes A, B et C est non négligeable. En revanche les harmoniques d'ordre supérieur ou égal à 2 sont négligées, ainsi que d'éventuelles sous-harmoniques.

Le coefficient γ est défini par (5.5) et C_2 est donné par

$$C_2 = \frac{(3\eta + 1 - \beta^2)/4 + (\sigma/4R_0p_0)(6\eta + 2 - 4/3\eta)}{1 + (2\sigma/R_0p_0)(1 - 1/3\eta)} \tag{5.18}$$

où

$$\beta = \frac{\rho\omega^2 R_0^2}{3\eta p_0}$$

et où η représente le coefficient polytropique.

Avec la solution linéaire (5.17), les expressions des moyennes A, B et C sont

$$A = 1 + C_2(|\gamma|P)^2 \tag{5.19}$$

$$B = 1 + (3 + 4C_2)(|\gamma|P)^2 \tag{5.20}$$

$$C = \left[1 + \frac{3(\eta - 1)(3\eta - 4)}{4}(|\gamma|P)^2 + (4 - 3\eta)C_2(|\gamma|P)^2\right]\left(1 + \frac{2\sigma}{R_0p_0}\right) \tag{5.21}$$

Le seuil de diffusion rectifiée prend alors une forme analytique

$$P^2 = \frac{\dfrac{1}{|\gamma|^2}\left(1 + \dfrac{2\sigma}{R_0 p_0} - \dfrac{c_i}{c_0}\right)}{(3+4C_2)\left(\dfrac{c_i}{c_0}\right) - \left[\dfrac{3(\eta-1)(3\eta-4)}{4} + (4-3\eta)C_2\right]\left(1 + \dfrac{2\sigma}{R_0 p_0}\right)} \tag{5.22}$$

La figure 5.3 indique les valeurs de ce seuil pour des bulles d'air dans de l'eau saturée ($c_i/c_0 = 1$) en fonction du rayon R_0. Remarquons que le seuil n'est plus défini pour des rayons de bulles inférieurs à 2.5 μm, ce qui s'explique physiquement par le fait que la pression dans des bulles inférieures à cette taille est extrêmement élevée, si bien que le processus de dissolution naturelle ne peut être contrebalancé par la diffusion rectifiée.

Le seuil passe par un minimum à la résonance, du fait que les oscillations de la bulle prennent alors une amplitude élevée, et le pompage de gaz s'en trouve amplifié.

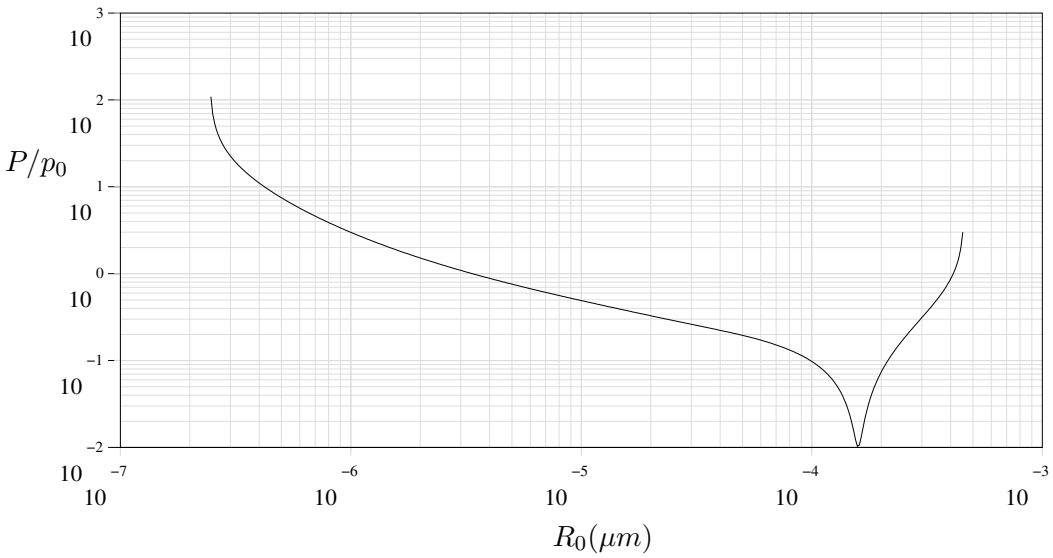


FIGURE 5.3 – Seuil de diffusion rectifiée en fonction du rayon d'après l'expression (5.22).

5.2.6 Taux de croissance d'une bulle

Lorsqu'une bulle est au-delà du seuil de diffusion rectifiée sur la figure 5.3, elle croît ; si elle est au dessous, elle se dissout.

Le taux de croissance est donné par le second membre de (5.12). La figure (5.4) indique la valeur de ce taux de croissance en fonction de R_0, pour de l'eau saturée en air, et différentes pressions acoustiques, et une fréquence de 20 kHz. Le maximum marqué du taux de croissance correspond au rayon de résonance de la bulle.

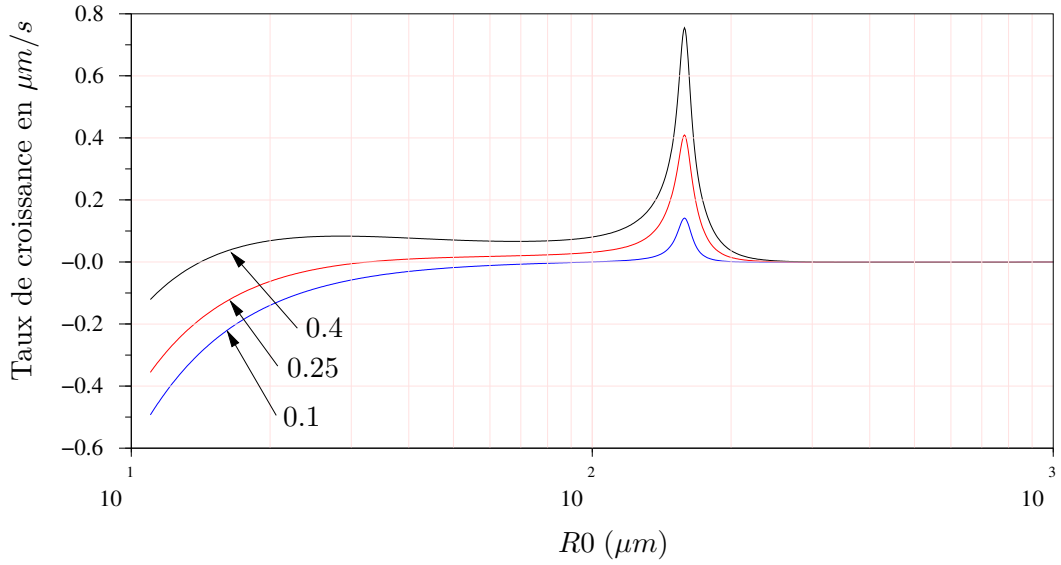


FIGURE 5.4 – Vitesse de croissance d'une bulle en fonction de son rayon pour différentes pressions acoustiques ($f = 20$ kHz). Les labels sur chaque courbe indiquent les valeurs de P/p_0.

Si la pression acoustique est suffisamment élevée, la courbe coupe l'axe des x, en deux points d'équilibre R_i et R_s situés respectivement à gauche et à droite du rayon de résonance. Ces points correspondraient sur la figure 5.3 aux deux points d'intersection d'une droite $P = C^{\text{te}}$ avec le seuil de diffusion rectifiée.

Il est clair que le point R_i est instable, et que R_s est stable : toute bulle de rayon initial inférieur au rayon seuil R_i aura son taux de croissance négatif et se dissoudra dans le liquide. En revanche une bulle de rayon initial supérieur à R_i verra son rayon augmenter jusqu'au rayon d'équilibre R_s.

Ainsi, à pression acoustique fixée, toute bulle suffisamment grosse au départ verra son rayon moyen converger vers un rayon d'équilibre parfaitement défini, et une bulle trop petite se dissoudra, ce qui conduirait au résultat très simple suivant : le rayon moyen des bulles stables d'une expérience de cavitation serait entièrement défini par la pression à laquelle elles sont soumises.

Ce résultat séduisant sur le plan de la théorie doit être nuancé par le fait qu'une bulle de rayon initial compris entre le rayon seuil et le rayon de résonance tendrait vers le rayon d'équilibre, *en traversant la résonance*. En fait, lorsque le rayon de la bulle approche la résonance, plusieurs effets parallèles interviennent. Comme nous le verrons dans les sections suivantes, la bulle peut se fragmenter suite au développement d'instabilités de surface ou encore en fin d'implosion si elle devient instable.

5.2.7 Synthèse

Nous retiendrons comme résultats analytiques pour les sections suivantes d'une part l'expression du seuil (5.22), et d'autre part l'expression du taux de croissance (5.12). Comme le montre la figure 5.5 extraite de Crum (1980), ces deux expressions ont été comparées favorablement avec des résultats expérimentaux.

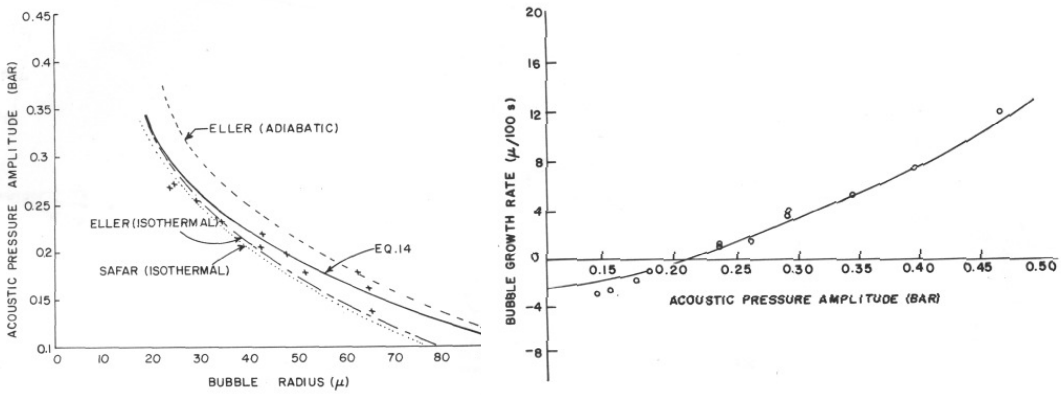


FIGURE 5.5 – D'après Crum (1980). A gauche : comparaison du seuil de diffusion rectifiée (5.22) (en traits pleins) avec les résultats expérimentaux. A droite : comparaison du taux de croissance (5.12) avec les résultats expérimentaux. La fréquence est 22.1 kHz et le rayon de la bulle pour la mesure du taux de croissance est 45 μm.

L'expression (5.12) sera écrite sous forme générique

$$\frac{dR_0}{dt} = w(R_0, P) \tag{5.23}$$

5.3 Forces de Bjerknes

5.3.1 Introduction

L'étude des oscillations radiales d'une bulle de cavitation, telle que nous l'avons envisagée au chapitre 1 est basée sur l'hypothèse de symétrie sphérique. L'excitation du système consiste en un champ de pression isotrope imposé infiniment loin de la bulle, ce qui sous-entend un milieu liquide infini où n'existerait que la bulle considérée.

Il est clair que cette hypothèse de symétrie sphérique n'est qu'une approximation. Tout d'abord, considérons toujours le cas d'une bulle isolée dans le liquide, soumise non plus à une perturbation de pression isotrope, mais par exemple au passage d'une onde plane. L'accélération du fluide étant dirigée parallèlement à l'axe de propagation, ce dernier joue un rôle privilégié et la bulle acquiert un mouvement longitudinal dans cette direction, en plus de ses oscillations de volume.

En fait, même dans ce cas, l'hypothèse de symétrie sphérique peut être raisonnablement acceptée si la pression est sensiblement constante sur des distances très grandes devant la taille de la bulle, autrement dit si $R_0 \ll \lambda$. Dans ces conditions, le déplacement du centre de la bulle est très faible sur une période de l'onde acoustique.

Mais les oscillations de volume de la bulle font que ce mouvement de translation est à moyenne non nulle, et s'il est vrai que sur une période de l'onde acoustique le centre de la bulle se déplace d'une distance infime, le déplacement cumulé sur plusieurs milliers de périodes acoustiques peut être conséquent. La force responsable de ce déplacement longitudinal est appelée *force de Bjerknes primaire* ou bien parfois force acoustique.

Goldman and Ringo (1949) furent parmi les premiers à reporter que sous l'action d'une onde acoustique stationnaire, des bulles de gaz se concentraient aux noeuds de pression. La taille des bulles observées était de l'ordre du millimètre et la fréquence acoustique de 60 kHz, ce qui correspond à une longueur d'onde de 2.5 cm dans l'eau pure et un rayon de résonance de 52 μm.

Blake (1949a) observe des bulles se déplaçant rapidement des ventres de pressions vers les noeuds et émet l'hypothèse selon laquelle les bulles de taille supérieure à la taille de résonance R_{res} (voir section 1.4.1) se déplaceraient vers les noeuds alors que les bulles plus petites que R_{res} se concentreraient

aux ventres. Ces dernières pourraient coalescer et devenant supérieures à la taille de résonance seraient éjectées vers les noeuds.

Nyborg and Hughes (1967) observent au contraire des bulles se dirigeant très rapidement vers des zones de haute pression acoustique, en suivant des chemins privilégiés et en s'organisant sous forme de lignes. Les auteurs attribuent cette dernière caractéristique à des forces attractives entre bulles.

Sur le plan théorique, Yosioka and Kawasima (1955) ont calculé la force s'exerçant sur une sphère compressible dans un champ acoustique. Zwick (1958) propose une dérivation simple de l'expression de cette force en découplant à priori le mouvement radial du mouvement de translation. L'écriture du bilan des forces hydrodynamiques sur la bulle oscillante fournit une équation différentielle du premier ordre sur la vitesse relative dans laquelle la force de Bjerknes apparaît comme un terme de forçage. C'est cette approche théorique que nous reprendrons et compléterons ci-dessous.

Crum and Eller (1970) ont effectué des mesures de vitesse de translation d'une bulle de taille inférieure à la taille de résonance, oscillant dans une onde stationnaire plane. Leur système expérimental est conçu de telle sorte que les bulles soient soumises à une force de Bjerknes opposée à la poussée d'Archimède et de module éventuellement supérieur, si bien que les bulles peuvent descendre dans le liquide. Cette vitesse de descente (de l'ordre de quelques cm/s) est comparée avec succès à la théorie pour des amplitudes acoustiques modérées.

5.3.2 Origine physique

L'équation du mouvement d'une bulle dans un liquide infini en mouvement est régi par l'équation (voir annexe C) :

$$m_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m_p \mathbf{g} + \rho V \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{g} \right) + \mathbf{F_P} \tag{5.24}$$

où $\mathbf{u}$ est le champ de vitesse qui existerait dans le liquide en l'absence de la bulle, $d\mathbf{u}/dt = \partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$ l'accélération du fluide, V volume de la particule, et m_p sa masse. La force $\mathbf{F_P}$ inclut l'ensemble des forces hydrodynamiques que le fluide exerce sur la particule à cause leur mouvement relatif.

La force de Bjerknes est liée à l'accélération de l'écoulement dans lequel est plongée la bulle, et correspond au terme

$$\mathbf{F_B} = \rho V \frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{5.25}$$

Considérons le cas où l'écoulement est une onde acoustique linéaire dans un liquide supposé non visqueux, de longueur d'onde $\lambda \gg R_0$ et exprimons la pression totale comme la somme de la pression hydrostatique p_0 et d'une pression acoustique p_a. L'équation de conservation de la quantité de mouvement du fluide s'écrit alors [1]

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} p_a \tag{5.26}$$

et la force de Bjerknes s'écrit

$$\mathbf{F_B} = -V \boldsymbol{\nabla} p_a \tag{5.27}$$

Cette expression est la plus courante dans la littérature Crum and Eller (1970); Leighton et al. (1990). Physiquement la force de Bjerknes est comparable à la poussée d'Archimède, en ce sens qu'elle résulte d'un gradient de pression dans l'écoulement en l'absence de bulle.

Si la particule était une particule solide (volume constant), les variations de la force (5.27) ne seraient liées qu'aux variations de pression acoustique, et dans le cas où celle-ci serait sinusoïdale, cette force serait à moyenne nulle. En revanche, pour une particule déformable, par exemple une bulle, la force $\mathbf{F_B}$ dépend également des variations de son volume V, résultant lui-même du champ de pression environnant. Du fait que la force est le produit de deux termes oscillants [2], sa moyenne sur une période acoustique peut être non-nulle.

5.3.3 Force acoustique sur une bulle

Avec les notations rappelées dans la section 5.1.2, la force de Bjerknes instantanée exercée sur une bulle placée dans un champ acoustique d'amplitude complexe $P(\mathbf{x})$ s'écrit

$$\mathbf{F_B} = -V \boldsymbol{\nabla} p \simeq -V_0 \left[1 + 3 \left(\frac{X e^{-i\omega t} + X^* e^{i\omega t}}{2} \right) \right] \left[\frac{\boldsymbol{\nabla} P e^{-i\omega t} + \boldsymbol{\nabla} P^* e^{i\omega t}}{2} \right] \tag{5.28}$$

1. Ici la dérivée particulaire devient une dérivée partielle sous l'hypothèse de l'acoustique linéaire. Notons que Yosioka and Kawasima (1955); Kobelev (1983) utilisent l'approximation dite acoustique qui consiste à conserver la dérivée particulaire ainsi que les variations de densité à l'ordre 1 dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement .

2. Pour cette raison, la force de Bjerknes est parfois qualifiée de «non-linéaire» ou bien de «second ordre».

les termes d'ordre supérieur en X étant négligés conformément à l'hypothèse linéaire. Les termes oscillatoires s'annulent lors du moyennage sur une période et la force moyenne exercée sur la bulle s'écrit

$$\langle \mathbf{F_B} \rangle = -2\pi R_0^3 \,\mathrm{Re}\,(X \boldsymbol{\nabla} P^*) = \frac{2\pi R_0}{\rho} \,\mathrm{Re}\,(\alpha P \boldsymbol{\nabla} P^*) \tag{5.29}$$

où α est défini par (5.4).

Considérons maintenant le cas d'une onde stationnaire plane. Notons x la variable spatiale sur l'axe de propagation et $\mathbf{e_x}$ le vecteur unitaire. Le profil de pression peut s'écrire

$$P(x) = p_m \sin\,(kx + \phi) \tag{5.30}$$

où p_m est la pression aux ventres, et ϕ un déphasage correspondant au calage de l'onde stationnaire par rapport à l'origine des abscisses. Les noeuds sont définis par $kx + \phi = n\pi$ et les ventres par $kx + \phi = (2n+1)\pi/2$. L'expression de la force de Bjerknes devient alors

$$\langle \mathbf{F_B} \rangle = \frac{\pi R_0 k}{\rho} \, p_m^2 \,\mathrm{Re}\,\alpha \;\sin\,(2kx + 2\phi) \;\; \mathbf{e_x} \tag{5.31}$$

On peut en tirer les conclusions suivantes (voir figure 5.6) :

- La force de Bjerknes est nulle aux ventres et aux noeuds de l'onde stationnaire. Elle est maximale aux points situés à mi-distance entre les ventres et les noeuds.
- Pour une bulle de taille inférieure à la taille de résonance, $\alpha(R_0)$ est à partie réelle positive, ce qui physiquement indique que la bulle se contracte dans la phase de surpression. La force de Bjerknes subie par la bulle est alors dirigée vers le ventre de pression le plus proche. Pour une telle bulle, les ventres de pression sont donc des points d'équilibre stables et les noeuds des points d'équilibre instable.
- Pour une bulle de taille supérieure au rayon de résonance, α est à partie réelle négative et la force est orientée vers le noeud de pression le plus proche. Ces derniers deviennent les points d'équilibre stable, alors que les ventres sont des points d'équilibre instable.
- Pour une bulle juste à la résonance, α est imaginaire pur, et la force subie par la bulle est nulle.

L'analyse de Blake (1949a) est donc bien confirmée par la théorie.

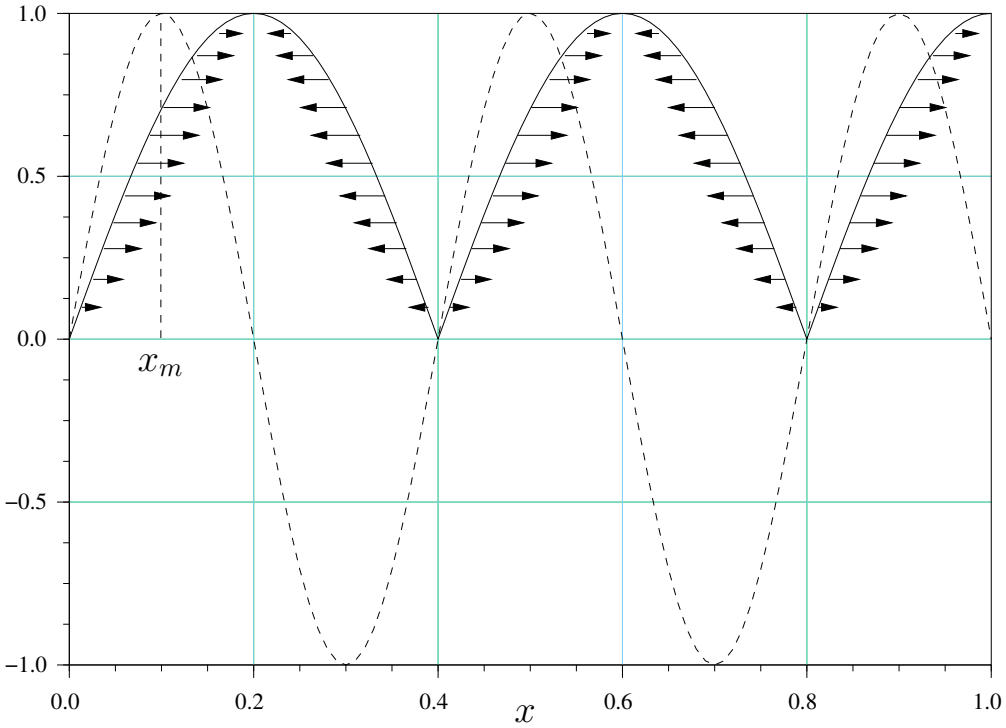


FIGURE 5.6 – En traits pleins : $|P(x)|$ défini par (5.30) ($\phi = 0$). En traits pointillés : force de Bjerknes sur une bulle de taille inférieure au rayon de résonance ($\mathrm{Re}\,\alpha > 0$). Les flèches indiquent le sens et l'amplitude de la force. Le point x_m est le point où la force de Bjerknes est maximale (et positive).

5.3.4 Lévitation d'une bulle

Il est tout-à-fait concevable que la force de Bjerknes équilibre exactement la poussée d'Archimède, auquel cas la bulle peut rester immobile (mais oscillant malgré tout radialement) dans le champ d'ondes stationnaires. Cette propriété remarquable permet d'observer aisément les oscillations radiales d'une bulle ainsi immobilisée et a été utilisée par de nombreux auteurs Crum and Eller (1970); Eller and Crum (1970); Crum (1980, 1983).

La poussée d'Archimède sur la bulle oscillante sera considérée égale à celle qui s'exercerait sur une bulle de rayon fixe R_0, soit

$$\mathbf{F_G} = -\frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho \mathbf{g} \tag{5.32}$$

Considérons par exemple le cas d'une onde stationnaire développée entre un émetteur acoustique et une surface libre (figure 5.7). Sur la surface libre, la pression acoustique est nulle et il s'agit donc d'un noeud de pression. En orientant l'axe des x vers le bas et en prenant l'origine des abscisses sur la surface libre, le champ acoustique est donné par (5.30) avec $\phi = 0$. L'équilibre des forces sur une bulle immobile s'écrit

$$-\frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho g + \frac{\pi R_0 k}{\rho}\, p_m^2 \,\mathrm{Re}\,\alpha\ \sin(2kx) = 0 \tag{5.33}$$

La figure 5.7 décrit le principe du système expérimental utilisé par Crum and Eller (1970). La courbe en traits pleins indique la force totale exercée sur une bulle de 50 μm avec une fréquence acoustique de 20 kHz, pour une pression aux noeuds de 0.15 bar. Le rayon d'équilibre est inférieur au rayon de résonance, et α est donc à partie réelle positive. On voit graphiquement que l'équilibre est réalisé en deux points x_1 et x_2 symétriques par rapport à $kx = \pi/2$. Entre le premier point et la surface libre, la force de Bjerknes est inférieure à la poussée d'Archimède, et la bulle remontera. Entre les deux points, la force totale est dirigée vers le bas, et la bulle descendra jusqu'au point d'équilibre stable x_2, où elle se stabilisera.

Remarque : il convient de noter que la position d'équilibre de la bulle n'est pas exactement le ventre de pression mais un point légèrement voisin. Il est clair d'après (5.33) que l'écart est lié à la poussée d'Archimède et est d'autant plus faible que la bulle est petite. D'après l'expression (5.28) de cette dernière, on remarque qu'en plus de la force moyenne sur une période (5.29), la bulle est soumise à une force oscillatoire à moyenne nulle proportionnelle à dP/dx. Si la bulle était située exactement sur un ventre de pression, cette force oscillatoire serait rigoureusement nulle. Du fait de sa position légèrement décalée, la bulle

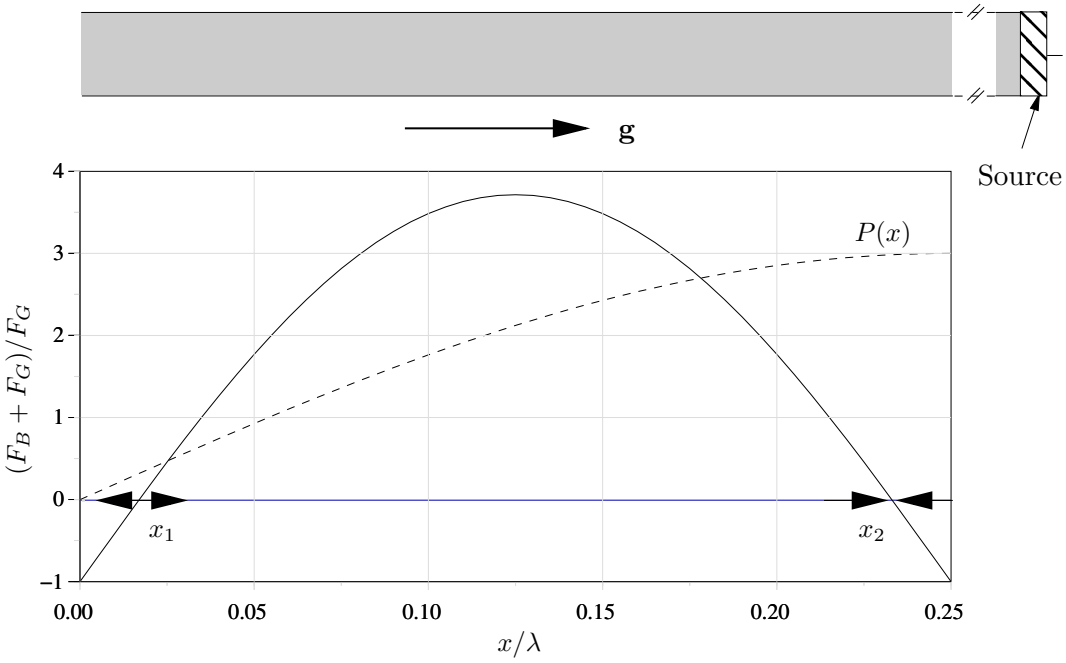


FIGURE 5.7 – Principe de la lévitation d'une bulle : la surface libre est en $x = 0$ et le premier ventre de pression est situé en $x = \lambda/4$; la courbe en traits pleins représente la force totale (Bjerknes + poussée d'Archimède) exercée sur la bulle. La courbe en pointillés rappelle l'enveloppe du champ d'ondes stationnaire. La force totale est nulle aux points x_1 et x_2, le premier étant instable, l'autre stable. Une bulle de taille inférieure à la taille de résonance injectée entre x_1 et x_2 se stabilisera en x_2. $\lambda = 7.5$cm, $f = 20$kHz

bien qu'immobile en moyenne, est soumise à une force périodique et se déplace donc (très légèrement) de part et d'autre de son point d'équilibre.

Cette remarque prend toute son importance dans le cadre d'une publication récente de Prosperetti (1997), qui réexamine le phénomène de sonoluminescence d'une bulle isolée, initialement mis en évidence par Gaitan et al. (1992) à l'aide d'un système expérimental similaire à celui décrit ci-dessus. Ce phénomène est généralement expliqué par la propagation d'ondes de chocs convergeant vers le centre de la bulle lors du collapse. Prosperetti remet en cause cette interprétation et propose le scénario suivant : les déplacements de la bulle autour de la position d'équilibre, aussi petits soient-ils, induisent une déformation de la bulle, notamment lors du collapse où un jet de liquide se forme dans le sens de la translation. L'impact de ce jet de liquide sur la paroi opposée de la bulle serait responsable de l'émission d'un flash lumineux. Ce mécanisme suggérerait qu'en apesanteur, la bulle serait en équilibre exactement au ventre de l'onde acoustique, ne subirait pas de déplacement longitudinal, et ne serait donc pas luminescente...

5.3.5 Vitesse de translation moyenne d'une bulle

Dans cette section, nous écrivons l'équation de la dynamique d'une bulle en mouvement dans le liquide soumis à une onde acoustique. Ce mouvement est régi par l'équation (5.24) et il s'agit d'expliciter les forces de perturbation $\mathbf{F_P}$.

Celles-ci sont au nombre de deux : la force de masse ajoutée $\mathbf{F_M}$, qui correspond physiquement au fluide que doit déplacer la bulle lors de son mouvement relatif par rapport à ce dernier, et la force de traînée visqueuse $\mathbf{F_V}$. Une discussion bibliographique sur les expressions de ces forces est reportée dans l'annexe C, et nous admettrons ici les expressions suivantes :

$$\mathbf{F_M} = \frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}V(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \tag{5.34}$$

$$\mathbf{F_V} = -K\pi R\mu(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \tag{5.35}$$

la constante K valant 4, 6 ou 12, selon l'expression retenue.

5.3.5.1 Equation du mouvement de la bulle.

Connaissant l'ensemble des forces exercées sur une bulle en mouvement dans un fluide, nous pouvons maintenant établir l'équation du mouvement d'une

bulle isolée dans un champ acoustique d'amplitude donnée, sous l'influence de la force de Bjerknes.

La loi de la dynamique sur la bulle s'écrit, d'après (5.24)

$$m_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m_p \mathbf{g} + \mathbf{F_B} - \rho V \mathbf{g} + \mathbf{F_M} + \mathbf{F_V} \tag{5.36}$$

Soit, en négligeant la masse de la bulle, et en utilisant les expressions (5.34) de $\mathbf{F_M}$ et (5.35) de $\mathbf{F_V}$ [3]

$$\frac{1}{2}\frac{d\left(V(\mathbf{v}-\mathbf{u})\right)}{dt} + \frac{3}{4}\frac{K\nu}{R^2}\, V(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \frac{1}{\rho}\mathbf{F_B} - V\mathbf{g} \tag{5.37}$$

Si les oscillations radiales de la bulle sont fixées, R et V sont données en fonction du temps, et la résolution de cette équation différentielle fournit la vitesse relative en fonction du temps. Nous supposons ici que le mouvement de translation de la bulle est sans conséquence sur son oscillation radiale, et que cette dernière est toujours déterminée par l'équation de Rayleigh.

Notons que l'équation différentielle (5.37) est non-linéaire en raison des termes oscillatoires R et V.

5.3.5.2 Vitesse moyenne finale

Une solution approchée est classiquement obtenue dans la littérature en négligeant les variations du volume de la bulle dans (5.37) sauf dans la force de Bjerknes, et en moyennant l'ensemble sur une période acoustique : on obtient alors une équation du premier ordre

$$\frac{d\left\langle \mathbf{v}-\mathbf{u}\right\rangle}{dt} + \frac{1}{\tau}\left\langle \mathbf{v}-\mathbf{u}\right\rangle = \frac{2}{\rho V_0}\langle \mathbf{F_B}\rangle - 2\mathbf{g} \tag{5.38}$$

avec

$$\tau = 2R_0^2/3K\nu \tag{5.39}$$

de laquelle on peut déduire la vitesse finale moyenne de la bulle Crum and Eller (1970) :

$$\left\langle \mathbf{v}-\mathbf{u}\right\rangle_\infty = \frac{1}{K\pi\mu R_0}\left\langle \mathbf{F_B}\right\rangle - \frac{4R_0^2}{3K\nu}\mathbf{g} \tag{5.40}$$

3. Nous utilisons une dérivée normale dans la force de masse ajoutée à la place d'une dérivée convective ce qui suppose que l'écoulement dans lequel est plongée la bulle est uniforme. Dans le cas d'une onde acoustique cela est naturellement faux, mais reste une bonne approximation tant que $R_0 \ll \lambda$

Cette opération de moyennage de l'équation (5.37) est généralement avancée de façon intuitive. Nous en proposons une dérivation rigoureuse par une méthode des échelles multiples dans la section suivante, et nous montrons que cette approximation est valable pourvu que les amplitudes d'oscillation de la bulle soient faibles.

Afin de montrer physiquement à quoi correspond cette opération de moyennage, nous avons superposé figure 5.8 la solution exacte de (5.37) obtenue numériquement, la solution de (5.38), et la constante correspondant à la vitesse moyenne finale (5.40). On voit clairement que le mouvement longitudinal de la bulle est la superposition d'un mouvement oscillatoire rapide et d'un mouvement exponentiel lent, et cette séparation des échelles de temps sera utilisée explicitement dans notre démonstration. L'expression (5.40) correspond à la valeur asymptotique du mouvement exponentiel.

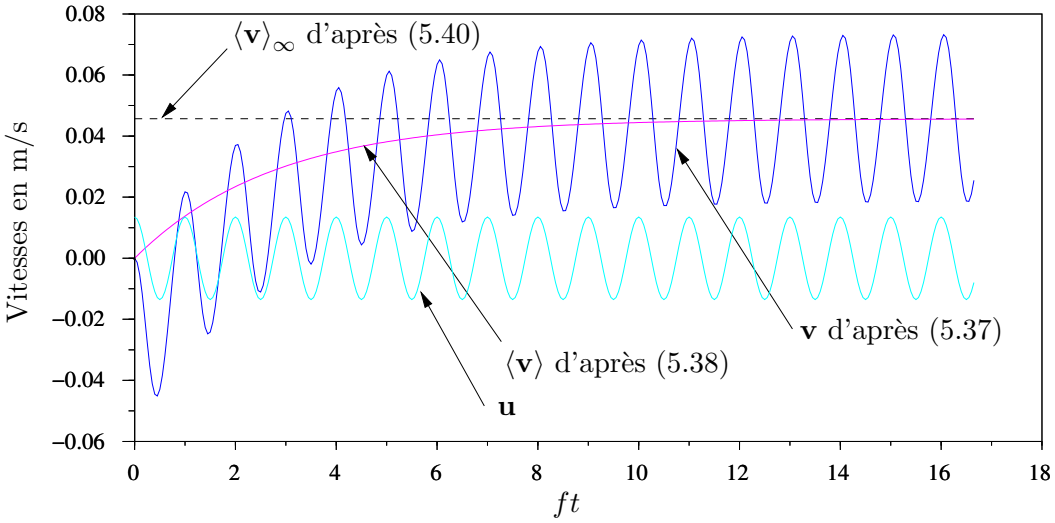


FIGURE 5.8 – Vitesse de la bulle en fonction du temps. La force de Bjerknes est calculée d'après (5.31) au point où elle est maximale, avec $\lambda = 7.5$ cm, $f = 20$ kHz, $p_m = 0.2$, $R_0 = 50\ \mu m$.

En résumé, une bulle initialement immobile atteint au bout d'un certain temps (une vingtaine de périodes dans le cas de la figure 5.8) une vitesse d'oscillation longitudinale d'amplitude constante et de moyenne non-nulle, de telle sorte que sur une grand nombre de périodes acoustiques, elle se déplacera significativement dans le milieu. Une illustration graphique du mouvement de la bulle en régime permanent est proposée figure 5.9.

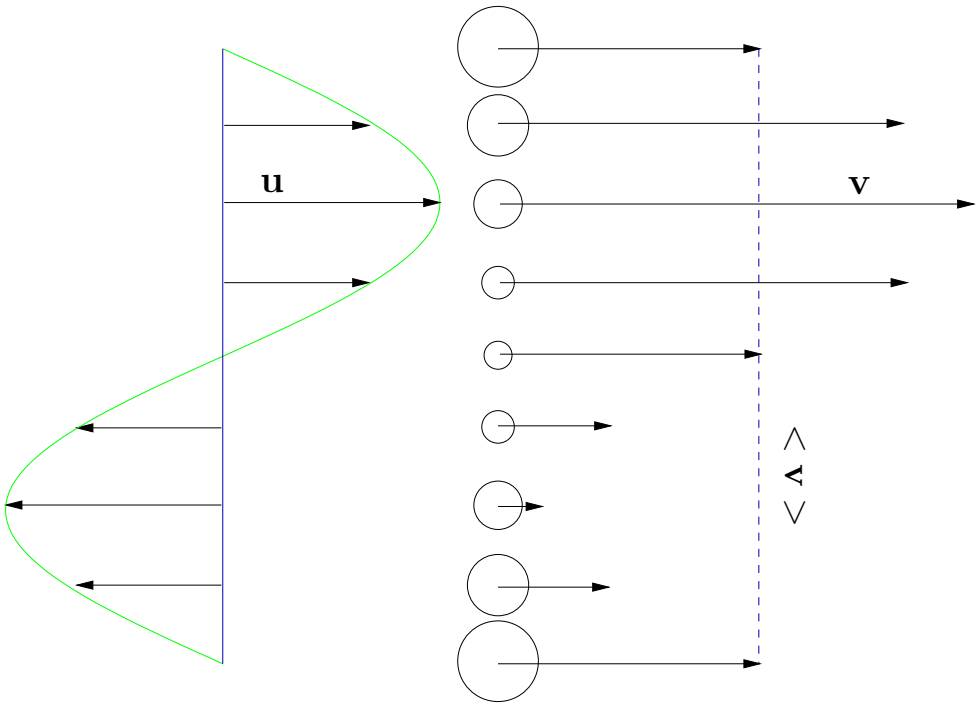


FIGURE 5.9 – Illustration de la vitesse instantanée **v** de la bulle par rapport à son rayon et à la vitesse du fluide **u**. La bulle est placée au point x_m de la figure 5.6.

5.3.5.3 Validité de l'opération de moyennage

On pose

$$\mathbf{w} = V(\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

On définit le rapport de la période acoustique et de la constante de temps τ définie par (5.39), par le petit paramètre

$$\epsilon = \frac{1}{f\tau} = \frac{3K\nu}{2fR_0^2} \tag{5.41}$$

et nous définissons deux temps adimensionnels T_0 et T_1, l'un «rapide» à l'échelle de la période acoustique, l'autre «lent» à l'échelle du mouvement exponentiel :

$$T_0 = ft \qquad T_1 = \epsilon T_0$$

On suppose alors que $\mathbf{w}$ dépend à la fois de l'échelle de temps rapide T_0 et de l'échelle de temps lente T_1. En considérant ces deux variables comme des variables indépendantes, la dérivée temporelle s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} = f\left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon\frac{\partial}{\partial T_1}\right)$$

L'équation (5.37) se réécrit alors :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial T_0} + \epsilon\left[Z(T_0)\mathbf{w} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial T_1}\right] = \mathbf{G}(T_0) \tag{5.42}$$

avec

$$Z(T_0) = \left[\frac{R_0}{R(T_0)}\right]^2, \qquad \mathbf{G}(T_0) = \frac{\mathbf{2F_B}(T_0)}{\rho f} - 2V(T_0)\frac{\mathbf{g}}{f}$$

On cherche maintenant $\mathbf{w}$ sous la forme d'un développement asymptotique

$$\mathbf{w}(T_0, T_1) = \mathbf{w^0}(T_0, T_1) + \epsilon\mathbf{w^1}(T_0, T_1) + \dots \tag{5.43}$$

En remplaçant cette expression dans (5.42) , on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{w^0}}{\partial T_0} + \epsilon\left[\frac{\partial \mathbf{w^1}}{\partial T_0} + \frac{\partial \mathbf{w^0}}{\partial T_1} + Z(T_0)\mathbf{w^0}\right] = \mathbf{G^0}(T_0) + \epsilon\mathbf{G^1}(T_0) \tag{5.44}$$

Cette équation nous donne une hiérarchie d'équations à l'ordre 0 et 1 en ϵ. Notons que la décomposition de $\mathbf{G}$ en $\mathbf{G_0}$ et $\mathbf{G_1}$ est pour l'instant arbitraire. Résolvons l'équation à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial \mathbf{w^0}}{\partial T_0} = \mathbf{G^0}(T_0) \tag{5.45}$$

$\mathbf{G_0}$ est une fonction oscillatoire de T_0. Si sa moyenne était non-nulle , $\mathbf{w^0}$ contiendrait un terme proportionnel à T_0 qui croit indéfiniment avec t (terme séculaire). Par conséquent $\mathbf{G_0}$ doit être à moyenne nulle, et il s'agit donc de la partie oscillatoire de $\mathbf{G}$. La décomposition de $\mathbf{G}$ s'écrit donc

$$\mathbf{G}(T_0) = \mathbf{G^0}(T_0) + \epsilon \mathbf{G^1}(T_0) = \tilde{\mathbf{G}} + \epsilon \frac{\langle \mathbf{G} \rangle}{\epsilon} \tag{5.46}$$

d'où la solution à l'ordre 0 :

$$\mathbf{w^0} = \int \tilde{\mathbf{G}} \, dT_0 + \mathbf{W}(T_1) \tag{5.47}$$

En reportant cette solution dans l'équation à l'ordre 1, on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{w^1}}{\partial T_0} = -\mathbf{W}'(T_1) - Z(T_0)\mathbf{W}(T_1) - Z(T_0) \int \tilde{\mathbf{G}} \, dT_0 + \frac{\langle \mathbf{G} \rangle}{\epsilon} \tag{5.48}$$

Par le même argument qu'à l'ordre 0, le terme de droite est une fonction oscillatoire de T_0 qui doit être à moyenne nulle, ce qui détermine $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{W}'(T_1) + \langle Z(T_0) \rangle \, \mathbf{W}(T_1) = -\left\langle Z(T_0) \int \tilde{\mathbf{G}} \, dT_0 \right\rangle + \frac{\langle \mathbf{G} \rangle}{\epsilon} \tag{5.49}$$

En résolvant cette équation différentielle en $\mathbf{W}(T_1)$, on obtient finalement l'expression de la solution à l'ordre 0

$$\mathbf{w^0}(T_0, T_1) = \underbrace{\int \tilde{\mathbf{G}} \, dT_0}_{\mathbf{w}_{osc}} + \underbrace{\left[\frac{\langle \mathbf{G} \rangle}{\epsilon} - \left\langle Z(T_0) \int \tilde{\mathbf{G}} \, dT_0 \right\rangle \right] \left(1 - e^{-\langle Z \rangle T_1}\right)}_{\mathbf{w}_{lent}} \tag{5.50}$$

Le premier terme représente la partie oscillatoire "rapide" de $\mathbf{w}$ et le second le terme "lent". Pour calculer ces deux composantes, supposons que le champ acoustique incident s'écrit

$$\mathbf{u}(T_0) = \frac{1}{2} \mathbf{u_a} e^{-i2\pi T_0} + c.c. \tag{5.51}$$

et décomposons le volume de la bulle en une partie moyenne et une partie oscillatoire sous la forme

$$V(T_0) = \langle V \rangle + \tilde{V} \tag{5.52}$$

La force de Bjerknes s'écrit, en décomposant les termes oscillatoires et les termes constants

$$\mathbf{F_B} = \rho V \frac{du}{dt} = \rho \omega \left[\langle V \rangle \frac{d\mathbf{u}}{dT_0} + \tilde{V} \frac{d\mathbf{u}}{dT_0} \right] \tag{5.53}$$

Le premier terme est de moyenne nulle et le deuxième peut être décomposé en une partie oscillatoire et une partie moyenne. D'où

$$\tilde{\mathbf{G}} = 2\langle V\rangle \frac{d\mathbf{u}}{dT_0} + 2\widetilde{\tilde{V}\frac{d\mathbf{u}}{dT_0}} \tag{5.54}$$

$$\langle \mathbf{G}\rangle = 2\left\langle \tilde{V}\frac{d\mathbf{u}}{dT_0}\right\rangle \tag{5.55}$$

$\mathbf{w}_{osc}$ s'écrit donc

$$\mathbf{w}_{osc} = 2\langle V\rangle \mathbf{u} + 2\int \widetilde{\tilde{V}\frac{d\mathbf{u}}{dT_0}}\, dT_0 \tag{5.56}$$

Calculons maintenant $\mathbf{w}_{lent}$. Pour cela on décompose aussi $Z(T_0)$ en une partie moyenne et une partie oscillante

$$Z(T_0) = \langle Z\rangle + \tilde{Z} \tag{5.57}$$

On vérifie aisément que

$$\left\langle Z(T_0)\int \tilde{\mathbf{G}}\, dT_0\right\rangle = 2\langle V\rangle \left\langle \tilde{Z}\mathbf{u}\right\rangle + 2\left\langle \tilde{Z}\int \widetilde{\tilde{V}\frac{d\mathbf{u}}{dT_0}}\, dT_0\right\rangle \tag{5.58}$$

Il est clair d'après leurs définitions que $\tilde{Z}$ et $\tilde{V}/\langle V\rangle$ sont du même ordre de grandeur, et comme $d\mathbf{u}/dt = -i2\pi\mathbf{u}$, le premier terme de (5.58) est du même ordre de grandeur que $\langle \mathbf{G}\rangle$, donc très inférieur à $\langle \mathbf{G}\rangle/\epsilon$. Il vient donc

$$\mathbf{w}_{lent} = \left[\frac{\langle \mathbf{G}\rangle}{\epsilon} + 2\left\langle \tilde{Z}\int \widetilde{\tilde{V}\frac{d\mathbf{u}}{dT_0}}\, dT_0\right\rangle\right]\left(1 - e^{-\langle Z\rangle T_1}\right) \tag{5.59}$$

En revenant à la définition de $\mathbf{w}$, nous en déduisons l'expression de la vitesse de la bulle

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \mathbf{u}&\left[1 + \frac{2\langle V\rangle}{\langle V\rangle + \tilde{V}}\right] + \frac{2}{\langle V\rangle + \tilde{V}}\int \widetilde{\tilde{V}\frac{d\mathbf{u}}{dT_0}}\, dT_0 \\ &+ \left[\frac{2}{\epsilon}\left\langle \tilde{V}\frac{d\mathbf{u}}{dT_0}\right\rangle - 2\left\langle \tilde{Z}\int \widetilde{\tilde{V}\frac{d\mathbf{u}}{dT_0}}\, dT_0\right\rangle\right]\frac{1}{\langle V\rangle + \tilde{V}}\left(1 - e^{-\langle Z\rangle T_1}\right)\end{aligned} \tag{5.60}$$

Il est facile de voir que lorsque le volume est constant, $\tilde{V}$ est nul et on retrouve l'expression classique

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{u} \tag{5.61}$$

Ce résultat n'est pas étonnant car il signifie qu'une particule indéformable plongée dans un champ acoustique entreprend des oscillations dont la vitesse

est à l'ordre 0 en ϵ celle prévue par l'écoulement potentiel, pourvu que le paramètre ϵ, proportionnel à la viscosité soit suffisamment petit.

Dès que la particule oscille au cours du temps, le troisième terme de (5.60) fait apparaître des variations de la vitesse de la bulle sur une échelle lente. Il est important de remarquer que du fait de la présence d'un facteur en $1/\epsilon$, ces variations sont non négligeables devant la partie oscillatoire de la vitesse, aussi petites soient les oscillations.

Afin de retrouver le résultat classique, développons l'expression (5.60) par rapport à l'amplitude relative $\delta = \tilde{V}/\langle V \rangle$, en remarquant que $\tilde{Z} = O(\delta)$.

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{u} + \frac{2}{\epsilon}\left\langle \delta \frac{d\mathbf{u}}{dT_0} \right\rangle \left(1 - e^{-\langle Z \rangle T_1}\right) + O(\delta) + O\left(\frac{\delta^2}{\epsilon}\right) \tag{5.62}$$

En revenant à la variable t et en explicitant ϵ, le deuxième terme, correspondant à la partie lente de $\mathbf{v}$ s'écrit

$$\mathbf{v}_{lent} = \frac{2\tau \langle \mathbf{F_B} \rangle}{\rho V_0}\left(1 - e^{-\langle Z \rangle t/\tau}\right) \tag{5.63}$$

qui est bien la solution de l'équation (5.38) au terme en $\langle Z \rangle$ près. Il est facile de voir que ce dernier est égal à 1 à $O(\delta^2)$ près. Il est intéressant de noter que dans le cas présent d'oscillations de faible amplitude, la prise en compte des variations du volume de la bulle dans l'expression de la traînée visqueuse induit essentiellement une correction sur la durée du transitoire.

Enfin, toujours dans ce cadre, la partie oscillatoire de la vitesse de la bulle est égale à $3\mathbf{u}$, c'est-à-dire à la vitesse d'une particule indéformable en écoulement potentiel, résultat obtenu sans démonstration par Kobelev and Ostrovskii (1989).

5.3.5.4 Ordres de grandeur de la vitesse finale.

Nous calculons ici des ordres de grandeur de la vitesse moyenne terminale définie par (5.40), afin de vérifier la validité des expressions des forces hydrodynamiques utilisées plus haut.

On considère une bulle de rayon R_0 placée dans une onde stationnaire de fréquence $f = 20$ kHz au point où la force de Bjerknes est maximale et positive (par exemple le point x_m de la figure 5.6). La force de Bjerknes moyenne est calculée d'après l'expression (5.31), et le coefficient K de la traînée visqueuse est pris égal à 12.

La figure (5.10.a) indique l'amplitude de la vitesse relative pour différentes amplitudes de l'onde. La figure (5.10.b) montre le nombre de Reynolds correspondant à cette vitesse finale, en prenant R_0 comme longueur caractéristique, et la figure (5.10.c) le produit du Reynolds par le coefficient C_r de Magnaudet and Legendre (1998), ce dernier étant calculé en prenant la vitesse radiale maximale atteinte par la bulle sur une période d'oscillation [4].

Notons tout d'abord que la vitesse moyenne prédite au voisinage de la résonance peut atteindre des valeurs très élevées. Les nombres de Reynolds correspondants sont de l'ordre de plusieurs milliers ; pour de telles valeurs, la bulle ne resterait certainement plus sphérique Magnaudet (1997), et son mouvement ne serait plus rectiligne. Notons que l'hypothèse d'oscillations linéaires au voisinage de la résonance est de toutes façons excessive.

Examinons ensuite les valeurs du produit $C_r.Re$: il est toujours supérieur à 1 sauf pour des bulles inférieures à 13 μm et une amplitude $p_m = 0.2$ bar. Nous avons calculé ce produit pour une bulle de 1 μm, et sa valeur est de l'ordre de 10^{-2} pour $p_m = 0.8$ bar et de 10^{-3} pour $p_m = 0.2$ bar. Il est donc difficile de donner une expression de la traînée visqueuse uniformément valable sur tout l'espace des paramètres. Nous prendrons arbitrairement dans les calculs qui suivront une valeur $K = 12$, sachant que cette valeur tend à sous-estimer la vitesse moyenne de translation de petites bulles.

5.3.5.5 Validité de l'approximation

La notion de vitesse moyenne finale définie ci-dessus est acceptable si la valeur de la force de Bjerknes exercée sur la bulle n'a pas trop varié pendant la durée du transitoire. Ce sera le cas si la bulle est toujours soumise au même champ acoustique pendant cette durée, autrement dit si la distance qu'elle parcourt pendant ce temps est très inférieure à la longueur d'onde, soit approximativement

$$\langle v \rangle_\infty \tau \ll \lambda \tag{5.64}$$

Pour quantifier plus précisément cette condition, nous considérons que la durée totale du transitoire est 4τ, instant à laquelle la vitesse moyenne de la bulle vaut 98% de sa valeur finale, et nous comparons la distance parcourue par la bulle pendant cette durée au dixième de la longueur d'onde. La figure

4. Ces deux grandeurs sont théoriquement positives, mais comme elles s'annulent au rayon de résonance, les figures sont plus lisibles en conservant le signe de $< v - u >_\infty$.

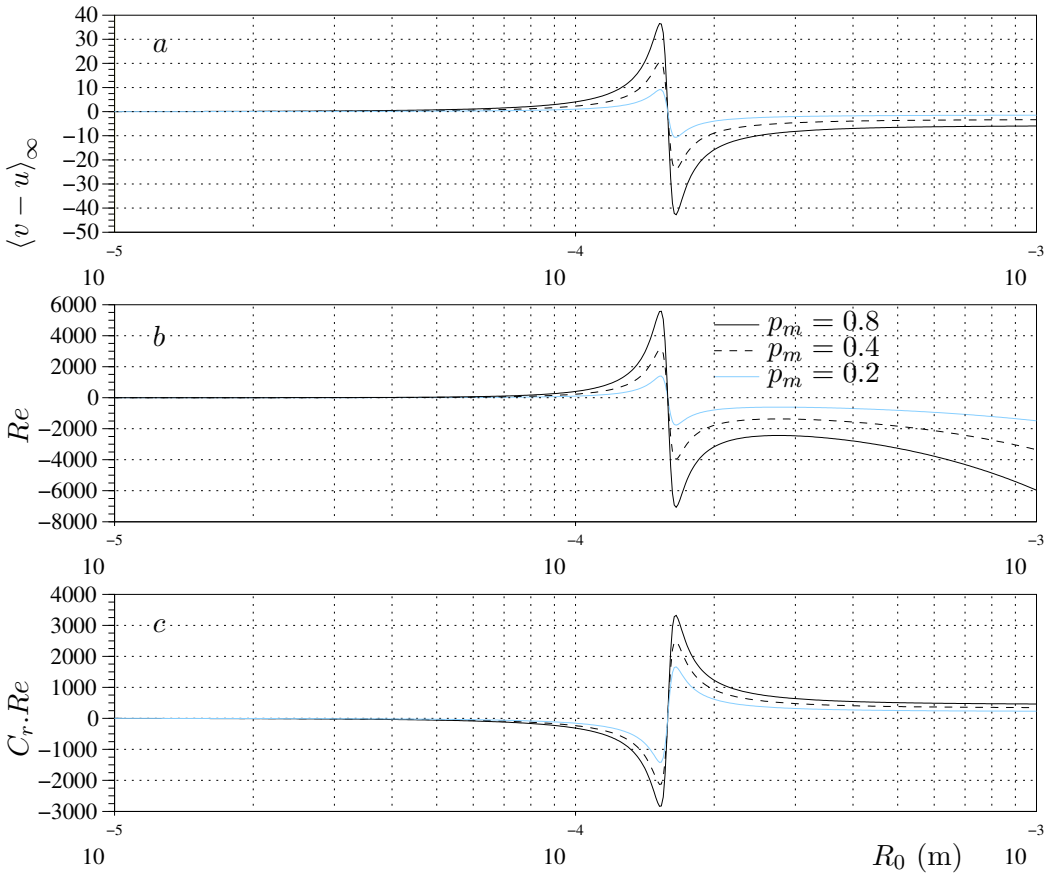


FIGURE 5.10 – **a** Vitesse moyenne finale d'une bulle dans une onde stationnaire d'amplitude p_m en fonction de son rayon d'équilibre. **b** Nombre de Reynolds correspondant. **c** Produit Re.C_r. $\lambda = 7.5$cm, $f = 20$kHz

5.11 représente la grandeur

$$\frac{4\tau \langle v_\infty \rangle}{\lambda/10}$$

en fonction du rayon R_0 pour des amplitudes de l'onde stationnaire de respectivement 0.2, 0.4 et 0.8 bars. On voit que cette grandeur est inférieure à 1 pour des bulles de rayon suffisamment inférieur au rayon de résonance, et qu'elle devient très supérieure à 1 pour des bulles au delà du rayon de résonance. On en conclut que la valeur de la vitesse moyenne finale définie par (5.40) n'a plus guère de sens pour des bulles de taille supérieure ou égale au rayon de résonance.

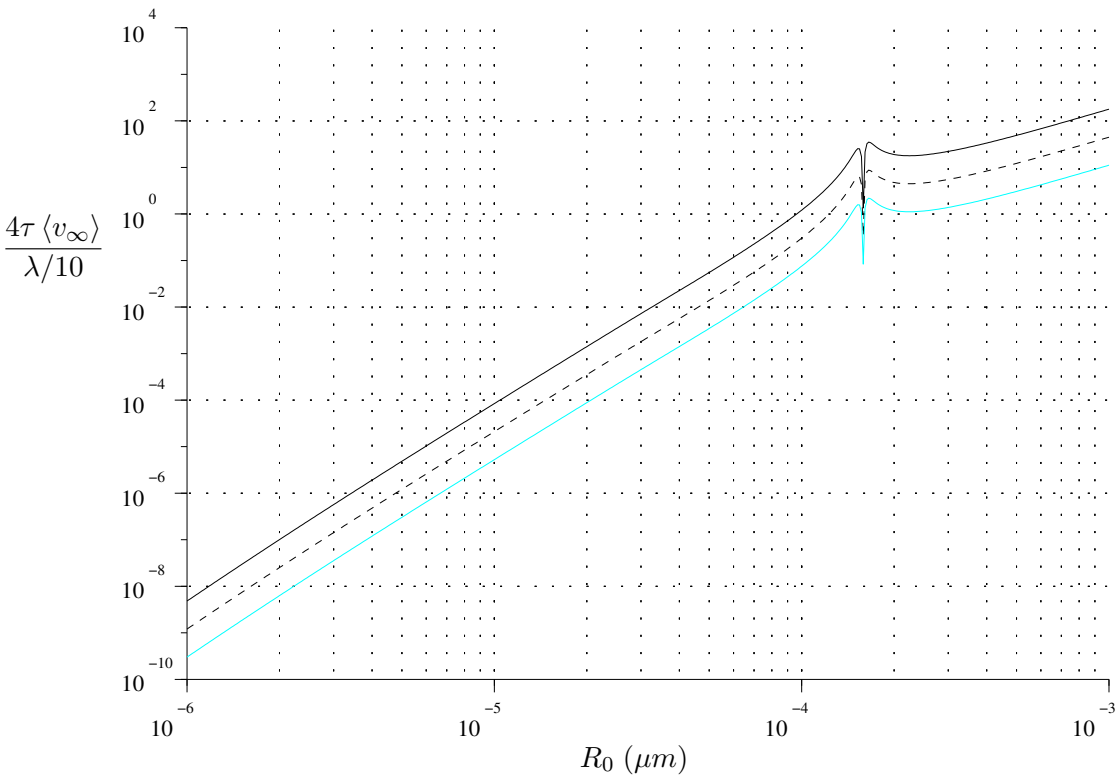


FIGURE 5.11 – Grandeur $\frac{4\tau\langle v_\infty\rangle}{\lambda/10}$ en fonction de R_0 pour les trois amplitudes $p_m = 0.2$, 0.4 et 0.8 bars, dans les mêmes conditions que la figure 5.10

5.3.6 Synthèse

Une bulle oscillant dans un champ acoustique stationnaire est soumise à une force périodique à moyenne non nulle, appelée force de Bjerknes primaire, de

telle sorte qu'elle acquiert au bout d'un certain temps une vitesse moyenne de translation constante, dirigée vers les ventres de l'onde si son rayon est inférieur au rayon de résonance, et vers les noeuds dans le cas contraire.

Nous avons mis en évidence une expression analytique (5.29)-(5.40) de cette vitesse moyenne, en fonction du rayon de la bulle, de la pression acoustique locale et de son gradient, soit formellement

$$\langle v \rangle = v(R_0, P, \boldsymbol{\nabla} P) \tag{5.65}$$

L'expression est classiquement utilisée dans la littérature, mais nous avons fourni ici d'une part une justification théorique rigoureuse du passage à la moyenne, et montré d'autre part les limites de la validité de cette expression.

En particulier, pour une bulle de taille supérieure à la taille de résonance, la constante de temps d'établissement de la vitesse moyenne est très lente, si bien que la bulle se déplace significativement dans l'onde stationnaire avant d'atteindre sa vitesse finale. Dans ce cas, l'expression obtenue n'est plus valable et surestime la vitesse de la bulle.

Les valeurs de la vitesse calculées au voisinage de la résonance ne sont pas physiques, et il est vraisemblable que dans la réalité, la bulle ne conserve ni une forme sphérique, ni un mouvement rectiligne. Des mouvements erratiques ont d'ailleurs été observés par Eller and Crum (1970); Crum and Eller (1970) à partir d'une certaine amplitude de l'onde stationnaire, ce phénomène correspondant à l'apparition d'instabilités surfaciques (cf. section 5.5).

5.4 Coalescence

Nous avons vu dans la section précédente qu'une onde stationnaire pouvait concentrer des bulles aux noeuds ou aux ventres. En fait, parallèlement aux forces liées à l'onde acoustique incidente évoquées précédemment, les bulles interagissent via des forces attractives où répulsives selon les cas. Les forces attractives favorisent le rapprochement des bulles et leur coalescence pour donner naissance à des bulles plus grosses.

Afin de déterminer la dynamique de la coalescence en fonction des paramètres acoustiques, il est tout d'abord nécessaire de caractériser les forces d'interaction entre les bulles.

5.4.1 Forces de Bjerknes secondaires.

Nous avons envisagé jusqu'ici les forces induites par un écoulement dans lequel est plongée la bulle, par exemple une onde acoustique. En fait, par ses oscillations, la bulle diffracte l'onde incidente et crée un champ de vitesse isotrope autour d'elle, qui se superpose à l'onde incidente. Si nous considérons alors une deuxième bulle, elle sera en première approximation soumise d'une part à la force de Bjerknes liée à l'onde incidente, et à une force supplémentaire créée par l'accélération du fluide liée aux oscillations de la première bulle. Cette force est appelée *force de Bjerknes de deuxième espèce* ou *secondaire*.

5.4.1.1 Expression classique

Nous proposons tout d'abord une dérivation simple d'une expression classique de cette force. On cherche la force $\mathbf{F_{21}}$ exercée sur une bulle 1 par le champ diffracté par une bulle 2 (figure 5.12). On notera respectivement R_i, V_i, $\mathbf{v_i}$, O_i et $\mathbf{r_i}$ le rayon, volume, vitesse de translation, centre et position de la bulle i par rapport à un référentiel fixe . On pose $\mathbf{r_{21}} = \mathbf{O_2O_1}$, $r = |\mathbf{r_{21}}|$ et $\mathbf{n_{21}} = \mathbf{r_{21}}/r$. Le référentiel lié au laboratoire sera noté $\mathcal{R}$ et celui lié à la bulle i sera noté $\mathcal{R}_i$.

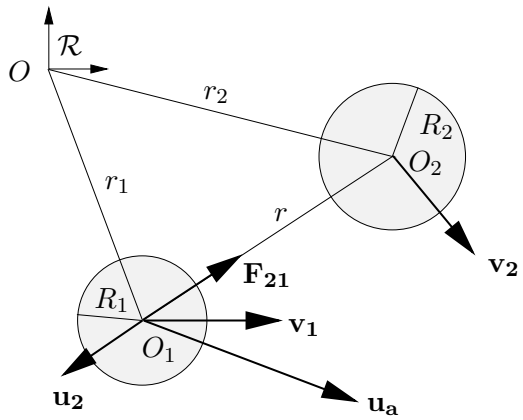


FIGURE 5.12 – Forces de Bjerknes de deuxième espèce : l'accélération radiale du fluide engendrée par les oscillations de la bulle 2 induit une force sur la bulle 1.

Nous ferons de plus les hypothèses suivantes :

1. Le liquide est supposé incompressible pour le calcul du champ diffracté par la bulle 2. C'est sous cette hypothèse que les oscillations de la bulle sont définies par l'équation de Rayleigh.
2. On néglige l'influence du champ diffracté par la bulle 1 sur la bulle 2, qui n'oscille que sous l'action du champ incident.
3. Nous considérons que le champ diffracté par la bulle 2 se limite au terme monopolaire, et nous négligeons le terme dipolaire lié à son mouvement de translation.

Sous ces hypothèses, la vitesse du fluide engendrée par les oscillations de la bulle 2 s'écrit (voir section 1.3.2.1, équation (1.5))

$$\mathbf{u_2} = \frac{\dot{V}_2}{4\pi r^2}\mathbf{n_{21}} \tag{5.66}$$

et se superpose, en écoulement potentiel, à la vitesse engendrée par le champ acoustique incident que nous notons $\mathbf{u_a}$. Si la bulle 1 était absente, le volume de fluide le remplaçant serait animé d'une vitesse $\mathbf{u_a} + \mathbf{u_2}$ et la force de Bjerknes totale exercée sur la bulle 1 s'écrit donc, en fonction de l'accélération totale $\mathbf{a}$ du fluide :

$$\mathbf{F_{tot}} = \rho V_1 \mathbf{a} = \rho V_1 \frac{D(\mathbf{u_a} + \mathbf{u_2})}{Dt} \tag{5.67}$$

où D/Dt est la dérivée particulaire égale à $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\mathcal{R}} + (\mathbf{u_a} + \mathbf{u_2}).\boldsymbol{\nabla}$.

Avec les hypothèses effectuées, cette expression s'écrit :

$$\mathbf{F_{tot}} = \mathbf{F_B} + \rho V_1 \left.\frac{\partial \mathbf{u_2}}{\partial t}\right|_{\mathcal{R}_2} \tag{5.68}$$

cette réduction étant justifiée brièvement dans la section 5.4.1.3. Le premier terme est la force de Bjerknes primaire ; le second est la force de Bjerknes secondaire et s'écrit, en utilisant (5.66)

$$\mathbf{F_{21}} = \frac{\rho V_1 \ddot{V}_2}{4\pi r^2}\mathbf{n_{21}} \tag{5.69}$$

force instantanée exercée par la bulle 1 sur la bulle 2. En inversant les rôles des bulles 1 et 2, on voit que les forces que s'exercent les bulles l'une sur l'autre ne sont pas symétriques [5]. Elles le deviennent malgré tout lorsque l'on prend leur moyenne sur une période, car $< V_1\ddot{V}_2 >=< V_2\ddot{V}_1 >= - < \dot{V}_1\dot{V}_2 >$.

5. Ce paradoxe vient du fait que les réflexions ont été négligées et correspond à l'hypothèse 2 ci-dessus.

Si l'on suppose maintenant les oscillations des bulles sinusoïdales, on note le rayon de la bulle i :

$$R_i = R_{0_i}\left[1 + \frac{X_i e^{-i\omega t} + X_i^* e^{i\omega t}}{2}\right]$$

L'expression de cette moyenne s'exprime, en fonction des amplitudes d'oscillation complexes X_1 et X_2 des deux bulles par

$$\langle \mathbf{F_{21}} \rangle = -\frac{9\rho\omega^2 V_{0_1} V_{0_2}}{8\pi r^2} \operatorname{Re}(X_1 X_2^*)\mathbf{n_{21}} \tag{5.70}$$

Il est clair d'après cette expression que la force est attractive si les deux bulles oscillent en phase et répulsive si elles sont en opposition.

Enfin, si les bulles sont soumises à la même pression oscillante à l'infini $p_\infty = 1/2(Pe^{-i\omega t} + \text{c.c.})$ (vrai si $r \ll \lambda$) on obtient d'après (5.3)

$$\langle \mathbf{F_{21}} \rangle = -\frac{2\pi |P|^2 \omega^2 R_{0_1} R_{0_2}}{\rho r^2} \operatorname{Re}(\alpha_1 \alpha_2^*)\mathbf{n_{21}} \tag{5.71}$$

Dans ces conditions, deux bulles ayant toutes les deux des rayons inférieurs ou supérieurs au rayon de résonance s'attireront, et se repousseront dans le cas contraire.

5.4.1.2 Discussion bibliographique

Ce résultat fondamental a été nuancé dans de nombreuses publications récentes. La première raison est que de nombreuses expérimentations Nyborg and Hughes (1967); Kobelev et al. (1979); Parlitz et al. (1995) ont mis en évidence des filaments stables constitués de bulles visibles à l'oeil nu. Cette observation est en contradiction avec la théorie ci-dessus selon laquelle les bulles devraient soit se repousser soit coalescer rapidement, et laisse entendre que pour des distances relativement faibles, la force d'interaction réelle pourrait s'annuler.

Cet effet peut s'interpréter simplement : lors de la dérivation ci-dessus, nous avons implicitement considéré que la bulle 1 n'oscillait (selon l'équation de Rayleigh) que sous l'influence du champ incident. En fait le champ diffracté par la bulle 2 influe sur les oscillations de la bulle 1 et réciproquement. En considérant l'excitation supplémentaire de chaque bulle par la partie monopolaire du champ diffracté par sa voisine, Zabolotskaya (1984) obtient l'expression (5.71) multiplié à un facteur correctif de la forme $1 + f(R_{0_1}/r, R_{0_2}/r)$ qui peut s'annuler dans certains cas à courte distance.

En toute rigueur, chaque bulle rediffracte à nouveau le champ diffracté par l'autre et ainsi de suite à l'infini. Une formulation rigoureuse tenant compte de ces réflexions multiples consiste à développer le potentiel (solution de $\nabla^2\phi = 0$) dans le liquide sous forme d'harmoniques sphériques et à prendre en compte les conditions aux limites sur chaque interface. Cette méthode est également plus rigoureuse au sens où elle permet d'envisager des déformations des deux bulles. Ainsi, Zavtrak (1987) met en évidence une modification de la formule classique à courte distance. Un calcul plus complet a été réalisé par Doinikov and Zavtrak (1995) tenant compte en plus de la tension superficielle. Les résultats sont qualitativement les suivants

- Pour deux bulles de tailles inférieures au rayon de résonance, la force de Bjerknes reste attractive quelle que soit la distance entre elles. Son amplitude est cependant supérieure (dans un rapport environ égal à 5) à celle prédite par (5.71).
- Pour deux bulles de tailles inférieure et supérieure au rayon de résonance, la force est répulsive à longue distance, et devient attractive à courte distance, ce qui implique l'existence d'une distance d'équilibre instable.
- Enfin, pour deux bulles de tailles supérieures au rayon de résonance, la force est attractive à longue distance, puis répulsive puis à nouveau attractive, et il y a donc deux distances d'équilibre, la plus grande étant stable, la plus petite instable. Cette conclusion permet d'expliquer, tout au moins qualitativement la formation de filaments de bulles visibles à l'oeil nu, ces dernières étant vraisemblablement supérieure au rayon de résonance. Notons que la distance d'équilibre est de l'ordre de 5 fois la moyenne des deux diamètres des bulles.

Hormis cette modification à courte distance de la force de Bjerknes, liée à la diffraction multiple entre les deux bulles, plusieurs auteurs Nemtsov (1983); Doinikov and Zavtrak (1988, 1990) ont pris en compte la compressibilité du liquide. Cet effet devient important dès que r/λ n'est plus très inférieur à 1. Pour un liquide compressible, la partie monopolaire du champ de vitesse diffracté contient un terme en $1/r$ (au lieu de $1/r^2$ en incompressible), ce qui induit une force variant en $1/r$, donc une attraction à longue distance plus importante que celle prévue par la théorie incompressible.

Sur le plan expérimental, Crum (1975) a effectué des mesures de la vitesse d'approche de deux bulles sous l'influence d'un champ acoustique. Cette vitesse est comparée à la vitesse d'approche théorique calculée en tenant compte de la force de Bjerknes (5.71), de la force de masse ajoutée et de la traînée visqueuse. Une bonne corrélation est obtenue en prenant pour cette dernière l'expression obtenue par Moore (1963).

5.4.1.3 Justification du passage de (5.67) à (5.68)

Nous revenons brièvement sur le passage de l'expression (5.67) à (5.68). Développons l'accélération dans (5.67) :

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \left.\frac{\partial(\mathbf{u_a}+\mathbf{u_2})}{\partial t}\right|_{\mathcal{R}} + (\mathbf{u_a}+\mathbf{u_2}).\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{u_a}+\mathbf{u_2}) \\ &= \left.\frac{\partial \mathbf{u_a}}{\partial t}\right|_{\mathcal{R}} + \mathbf{u_a}.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u_a} + \left.\frac{\partial \mathbf{u_2}}{\partial t}\right|_{\mathcal{R}_2} + \mathbf{v_2}.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u_2} + \mathbf{u_a}.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u_2} + \mathbf{u_2}.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u_a} + \mathbf{u_2}.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u_2}\end{aligned}$$

Le passage à la deuxième ligne étant lié au changement de référentiel $\mathcal{R} \to \mathcal{R}_2$. Les deux premiers termes sont reliés à l'expression de la force de Bjerknes primaire et n'entrent pas dans le cadre du problème à deux bulles ; le troisième est celui que nous conservons dans l'expression de la force de Bjerknes secondaire. Nous justifions donc ci-dessous le fait de négliger les 4 derniers par rapport au troisième.

Si nous notons δ l'amplitude relative des oscillations de volume de la bulle, et en utilisant l'expression (5.66) de la vitesse $\mathbf{u_2}$, les ordres de grandeurs de ces termes sont résumés dans le tableau suivant (en remarquant que $\mathbf{v_2}$ est du même ordre de grandeur que $\mathbf{u_a}$) :

$$\begin{array}{lll} \left.\dfrac{\partial \mathbf{u_2}}{\partial t}\right|_{\mathcal{R}_2} & \dfrac{\ddot{V}_2}{r^2} & \simeq \dfrac{\omega^2 \delta V_{2_0}}{r^2} \\ \mathbf{v_2}.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u_2} & v_2 \dfrac{\dot{V}_2}{r^3} & \simeq \dfrac{u_a \omega \delta V_{2_0}}{r^3} \\ \mathbf{u_a}.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u_2} & u_a \dfrac{\dot{V}_2}{r^3} & \simeq \dfrac{u_a \omega \delta V_{2_0}}{r^3} \\ \mathbf{u_2}.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u_a} & \dfrac{\dot{V}_2}{r^2}\dfrac{u_a}{\lambda} & \simeq \dfrac{u_a \omega \delta V_{2_0}}{r^2 \lambda} \\ \mathbf{u_2}.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u_2} & \dfrac{\dot{V}_2^2}{r^5} & \simeq \dfrac{\omega^2 \delta^2 V_{2_0}^2}{r^5} \end{array}$$

Le cinquième varie en δ^2 et disparaît dans l'hypothèse d'oscillations de faible amplitude.

Le rapport du quatrième au premier est d'ordre $u_a/\lambda\omega = u_a/c$ et est donc négligeable.

Enfin le deuxième et le troisième doivent être négligés par consistance avec l'hypothèse de suppression des termes dipolaires. En effet le terme dipolaire

du champ de vitesse diffracté par la bulle 2 s'écrit Landau and Lifschitz (1971) :

$$\frac{3}{8\pi}\, V_2 \frac{3(\mathbf{v_2}.\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{v_2}}{r^3}$$

Sa prise en compte dans l'accélération introduirait des termes d'ordre $u_a \omega V_{2_0}/r^3$ dont le rapport aux termes 2 et 3 est d'ordre $1/\delta$. Par conséquent, si nous négligeons les termes dipolaires, les deuxième et troisième termes du tableau précédent doivent être aussi négligés, d'où le résultat.

5.4.2 Mouvement d'approche de deux bulles

Connaissant la force supplémentaire exercée sur une bulle par une bulle voisine, il est possible, en utilisant les résultats de la section précédente de déterminer le mouvement relatif de deux bulles dans un champ acoustique donné. Nous rappelons ici brièvement le calcul effectué par Kobelev (1983).

Reprenons la loi de la dynamique (5.37) d'une bulle , disons la numéro 1, en prenant en compte la force de Bjerknes de 2ème espèce exercée par la bulle 2 ; on supposera que les forces de masse ajoutée et de traînée visqueuse ne sont pas affectées par la présence d'une deuxième bulle :

$$\frac{1}{2}\frac{d\left[V_1(\mathbf{v_1} - \mathbf{u})\right]}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{R_{0_1}}{R_1}\right)^2 \frac{1}{\tau_1}\, V_1(\mathbf{v_1} - \mathbf{u}) = \frac{1}{\rho}\mathbf{F_{B_1}} - V_1\mathbf{g} + \frac{1}{\rho}\mathbf{F_{21}} \quad (5.72)$$

En reprenant la méthode de la section 5.3.5, on obtient la vitesse moyenne de la bulle 1 :

$$\langle \mathbf{v_1} \rangle = \mathbf{v_{0_1}} + \frac{2\tau_1}{\rho V_1}\langle \mathbf{F_{21}} \rangle \quad (5.73)$$

où $\mathbf{v_{0_1}}$ est la vitesse moyenne qu'atteindrait la bulle si elle n'était soumise qu'à la force de Bjerknes de première espèce et à la poussée d'Archimède. Si l'on suppose que les deux bulles sont soumises au même champ acoustique, une équation semblable peut être écrite pour la bulle 2 en inversant le sens de la force d'interaction. En prenant pour cette dernière l'expression $\langle \mathbf{F_{21}} \rangle = -\kappa \mathbf{r_{21}}/r^3$ donnée par (5.71) et en soustrayant les deux équations du mouvement, on obtient la vitesse d'approche moyenne des deux bulles

$$\langle \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} \rangle = \frac{d\mathbf{r_{21}}}{dt} = \mathbf{v_0} - \chi \frac{\mathbf{r_{21}}}{r^3} \quad (5.74)$$

avec

$$\mathbf{v_0} = \mathbf{v_{0_1}} - \mathbf{v_{0_2}} \tag{5.75}$$

$$\mathbf{v_{0_i}} = \frac{2}{K\rho\mu}\,\mathrm{Re}\,(\alpha_i P \boldsymbol{\nabla} P) - \frac{4R_{0_i}^2}{3K\nu}\mathbf{g} \tag{5.76}$$

$$\chi = \frac{2\kappa}{\rho}\left(\frac{\tau_1}{V_1} + \frac{\tau_2}{V_2}\right) \tag{5.77}$$

$$\tau_i = 2R_{0_i}^2/3K\nu \tag{5.78}$$

$$\kappa = \frac{2\pi|P|^2\omega^2 R_{0_1}R_{0_2}}{\rho}\,\mathrm{Re}\,(\alpha_1\alpha_2^*) \tag{5.79}$$

Afin d'exploiter l'équation (5.74), il est possible de montrer que la grandeur

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{r_{21}} \wedge \mathbf{v_0})^2 + \chi\frac{\mathbf{r_{21}}.\mathbf{v_0}}{r} \tag{5.80}$$

est une constante du mouvement.

5.4.3 Modélisation de la coalescence

Notre souhait est de calculer l'évolution par coalescence d'un nuage de bulles donné. Nous supposerons que deux bulles coalescent instantanément à partir du moment où elles entrent en contact et nous déterminons donc dans un premier temps les fréquences de collisions entre paires de bulles de rayons et de vitesses initiales données. Le problème se limite à trouver le point de contact d'après l'équation du mouvement (5.80).

Le calcul, basé sur les mêmes principes que les fréquences de collision dans les gaz, a été conduit par différents auteurs, mais il nous semble que le résultat obtenu est incomplet. C'est pourquoi nous reprendrons le calcul détaillé de la section de collision dans la section 5.4.3.3.

5.4.3.1 Définition de la section de collision

Tout d'abord remarquons d'après (5.75) que le problème est en tout point équivalent au problème de collision entre une bulle 1 de vitesse initiale $\mathbf{v_0}$ et une bulle 2 immobile, et cherchons la condition pour que la collision s'effectue. Prenons l'axe des x parallèle à la vitesse initiale $\mathbf{v_0}$ et centré sur la bulle immobile, et supposons les particules initialement infiniment éloignées l'une

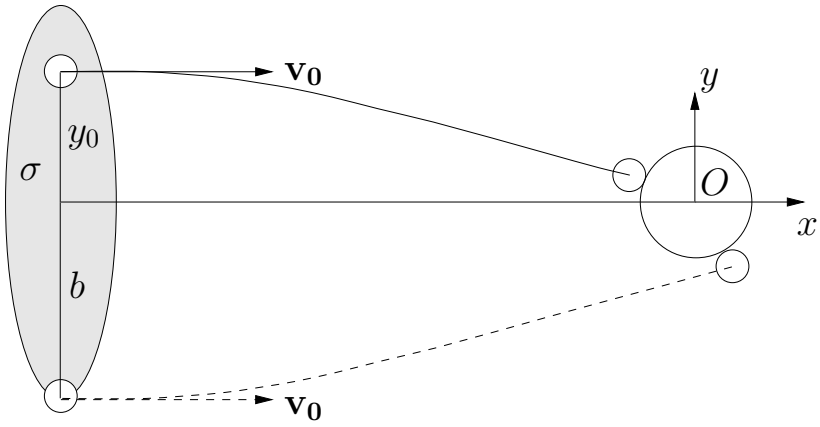


FIGURE 5.13 – Trajectoire du mouvement relatif des deux bulles. la trajectoire en pointillés correspond à la limite de collision. σ est la section de collision et b le paramètre d'impact.

de l'autre, la bulle en mouvement étant à une distance y_0 de l'axe des x (figure 5.13).

L'équation de la trajectoire est, d'après (5.80)

$$\frac{1}{2}(y_0^2 - y^2)v_0 - \chi\left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = 0 \tag{5.81}$$

La collision aura lieu s'il existe un point de la trajectoire tel que $\sqrt{x^2+y^2} = R_{0_1} + R_{0_2}$. Nous montrerons que ceci n'est possible que si $y_0 \leq b$, où b paramètre d'impact est donné par

$$b = \begin{cases} S_0(1+\eta) & \text{si } \eta < 1 \\ 2S_0\sqrt{\eta} & \text{si } \eta \geq 1 \end{cases} \tag{5.82}$$

avec

$$S_0 = R_{0_1} + R_{0_2} \qquad \eta = \frac{\chi}{v_0 S_0^2} \tag{5.83}$$

On en déduit que les bulles de rayon R_{0_1} qui entrent en collision avec la bulle 2 sont celles qui traversent le disque de section $\sigma = \pi b^2$ (section de collision) centré sur l'axe des x.

5.4.3.2 Fréquence de collision

Le nombre de collisions par unité de temps est donc égal au flux de bulles de rayon R_{0_1} à travers cette section soit

$$N_c = N(R_{0_1})\sigma v_0(R_{0_1}, R_{0_2}) \tag{5.84}$$

où $N(R_{0_1})$ est le nombre de bulles de rayon R_{0_1} par unité de volume et le produit σv_0 étant donné par

$$\sigma v_0 = \begin{cases} \pi v_0 \left(S_0 + \dfrac{\chi}{v_0 S_0} \right)^2 & \text{si } \dfrac{\chi}{v_0 S_0^2} < 1 \\ 4\pi\chi & \text{si } \dfrac{\chi}{v_0 S_0^2} \geq 1 \end{cases} \tag{5.85}$$

L'expression de cette grandeur n'a jamais été dérivée correctement à notre connaissance : Kobelev (1983) considère que les bulles ont un rayon nul et obtient $\sigma v_0 = 4\pi\chi$, résultat utilisé notamment par Kobelev and Ostrovskii (1983, 1989).

En prenant en compte le rayon fini des bulles, Alekseev and Yushin (1986) obtiennent inconditionnellement $\sigma v_0 = \pi v_0 (S_0 + \chi/v_0 S_0)^2$ qui est l'expression que nous obtenons dans le cas $\chi/v_0 S_0^2 < 1$. Cette valeur est fausse pour $\chi/v_0 S_0^2 \geq 1$, et admet d'ailleurs une singularité pour $v_0 = 0$, c'est-à-dire lorsque les deux bulles ont le même rayon. Cette singularité disparaît en prenant l'expression correcte (5.85) dérivée ci-dessus.

5.4.3.3 Calcul détaillé de la section de collision

Nous détaillons maintenant le calcul conduisant à l'expression du paramètre d'impact (5.82).

La collision a lieu pour les points (x, y) tels que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R_{0_1} + R_{0_2} = S_0 \tag{5.86}$$

En éliminant y dans l'équation de la trajectoire (5.81) grâce à cette relation, on obtient l'équation du second degré en x :

$$x^2 - 2S_0 x + y_0^2 - S_0^2 - 2\eta S_0^2 = 0 \tag{5.87}$$

où η paramètre adimensionnel est donné par :

$$\eta = \frac{\chi}{v_0 S_0^2} \tag{5.88}$$

Cette équation n'admet des solutions que si son discriminant est positif ou nul, d'où une première condition

$$y_0^2 \leq S_0^2(1+\eta)^2 \tag{5.89}$$

la limite représentant le paramètre d'impact b, et la section de collision étant définie par $\sigma = \pi b^2$.

Le calcul de Alekseev and Yushin (1986) s'arrête à ce niveau. Il fournit une valeur singulière de la section de collision pour $v_0 = 0$, ce qui est normal, et signifie simplement que deux bulles initialement immobiles (ou de même vitesse initiale) ne peuvent échapper l'une à l'autre.

Cependant, comme nous le notons dans le texte, cette valeur fournit aussi une valeur singulière pour le produit σv_0 qui conduirait à une fréquence de collision infinie. Nous avons examiné les raisons de cette singularité, et trouvé que les solutions de l'équation du second degré (5.87) ne sont pas forcément solutions de l'équation de départ (5.81). En effet, la condition (5.86) impose de plus que

$$|x| \leq |S_0| \tag{5.90}$$

condition que doivent vérifier les deux racines x_+ et x_- de l'équation (5.87) :

$$x_\pm = S_0\eta \pm \sqrt{S_0^2(1+\eta)^2 - y_0^2} \tag{5.91}$$

La solution x_+ est toujours positive, et x_- est positive pour $y_0^2 > S_0^2(1+2\eta)$. Examinons la condition (5.90) pour les deux racines :

1. $|x_+| \leq S_0$
   si
   $$\sqrt{S_0^2(1+\eta)^2 - y_0^2} \leq S_0(1-\eta)$$
   ce qui n'est possible que si $\eta < 1$, et cette condition s'écrit alors
   $$y_0^2 \geq 4\eta S_0^2$$

2. $|x_-| \leq S_0$
   Deux cas se présentent

   – $x_- > 0$ soit $y_0^2 \geq S_0^2(1+2\eta)$
     La condition s'écrit
     $$\sqrt{S_0^2(1+\eta)^2 - y_0^2} \geq S_0(1-\eta)$$

ce qui est toujours vrai si $\eta < 1$. Si $\eta > 1$, on obtient après calcul la condition

$$y_0^2 \leq 4\eta S_0^2$$

dont on vérifie qu'elle est bien compatible avec $x_- > 0$ lorsque $\eta > 1$.

– $x_- < 0$ soit $y_0^2 \leq S_0^2(1+2\eta)$
La condition s'écrit

$$\sqrt{S_0^2(1+\eta)^2 - y_0^2} \leq S_0(1+\eta)$$

ce qui est toujours vrai.

Le résultat peut être résumé dans le tableau suivant

	x_+	x_-
$\eta > 1$	Non solution	$y_0^2 \leq 4\eta S_0^2$
$\eta < 1$	$4\eta S_0^2 \leq y_0^2 \leq S_0^2(1+\eta)^2$	$y_0^2 \leq S_0^2(1+\eta)^2$

On en déduit donc que la valeur de la section de collision $\sigma = \pi S_0^2(1+\eta)^2$ obtenue inconditionnellement par Alekseev and Yushin (1986), n'est valable que lorsque $\eta < 1$ (deuxième ligne du tableau). Dans le cas contraire (première ligne du tableau), sa valeur correcte est $\sigma = 4\pi\eta S_0^2$. Le produit σv_0 correspondant vaut $4\pi\chi$ et il est curieux de constater que c'est le résultat obtenu par Kobelev and Ostrovskii (1983) qui conduisent le calcul en négligeant la taille des bulles !

5.4.4 Evolution de la distribution de taille par coalescence.

Replaçons maintenant ce résultat dans le contexte d'un champ de bulles. Le nombre de bulles par unité de volume de rayon appartenant à $[R_0, R_0 + dR_0]$ est défini par $N(R_0)dR_0$ où $N(R_0)$ est la fonction de distribution de taille des bulles.

Le nombre de bulles appartenant à $[R_{0_1}, R_{0_1} + dR_{0_1}]$ qui coalescent avec une bulle de rayon R_{0_2} par unité de temps et par unité de volume est, d'après (5.84)

$$dn = \sigma(R_{0_1}, R_{0_2}) v_0(R_{0_1}, R_{0_2}) N(R_{0_1}) dR_{0_1} \tag{5.92}$$

On omettra désormais la dépendance de σ et v_0 par rapport à R_{0_1} et R_{0_2} pour simplifier l'écriture. Le nombre total de collisions par unité de temps et de volume entre deux bulles de rayons appartenant respectivement à $[R_{0_1}, R_{0_1} + dR_{0_1}]$ et $[R_{0_2}, R_{0_2} + dR_{0_2}]$ est donc

$$d^2n = \sigma v_0 \; N(R_{0_1})N(R_{0_2})dR_{0_1}dR_{0_2} \tag{5.93}$$

A partir de ce résultat nous allons calculer les variations par unité de temps de la fonction de distribution $N(R_0)$ à cause

- des bulles de rayon $\in [R_0, R_0 + dR_0]$ qui apparaissent par coalescence de bulles plus petites
- des bulles de rayon $\in [R_0, R_0 + dR_0]$ qui disparaissent par coalescence avec une bulle de taille quelconque

5.4.4.1 Apparition de bulles par coalescence

On cherche le nombre de bulles de rayon appartenant à $[R_0, R_0 + dR_0]$ qui apparaissent par unité de temps et de volume par coalescence de deux bulles plus petites.

Tout d'abord, le nombre total de collisions par unité de temps et de volume entre une bulle de rayon $R_{0_1} \leq R_0$ et une bulle de rayon appartenant à $[R_{0_2}, R_{0_2} + dR_{0_2}]$ est

$$dn = \int_{R_{0_1}=0}^{R_{0_1}=R_0} \sigma v_0 \; N(R_{0_1})N(R_{0_2})dR_{0_1}dR_{0_2} \tag{5.94}$$

Pour former une bulle de rayon R_0, on peut envisager les deux processus $(R_{0_1}, R_{0_2}) \to R_0$ ou bien $(R_{0_2}, R_{0_1}) \to R_0$ avec $R_{0_1}^3 + R_{0_2}^3 = R_0^3$. On obtient donc le nombre de bulles de rayon appartenant à $[R_0, R_0 + dR_0]$ qui apparaissent en remplaçant R_{0_2} par $\sqrt[3]{R_0^3 - R_{0_1}^3}$ dans l'expression ci-dessus, et en divisant par 2 pour ne compter chaque collision qu'une seule fois, soit

$$dn(R_0)_{\text{apparues}} = dR_0 \frac{1}{2} \int_0^{R_0} \sigma v_0 \; N(R_{0_1})N(R_{0_2}) \frac{R_0^2}{R_{0_2}^2} dR_{0_1}$$
$$\text{avec } R_{0_2} = \sqrt[3]{R_0^3 - R_{0_1}^3} \tag{5.95}$$

d'où la variation de la fonction de distribution $N(R_0)$ par unité de temps liée au nombre de bulles apparaissant par coalescence

$$\left.\frac{dN(R_0)}{dt}\right|_{\text{apparues}} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{R_0} \sigma v_0 \; N(R_{0_1})N(R_{0_2})\frac{R_0^2}{R_{0_2}^2}dR_{0_1}}_{\mathcal{C}_{\text{app}}(P,\boldsymbol{\nabla}P,R_0,N)}$$

$$\text{avec } R_{0_2} = \sqrt[3]{R_0^3 - R_{0_1}^3} \quad (5.96)$$

Cette intégrale dépend du rayon R_0 des bulles qui apparaissent par coalescence, de l'amplitude locale de la pression P et de son gradient $\boldsymbol{\nabla}P$ via le terme en σv_0, et enfin de la fonction de distribution de taille des bulles N.

5.4.4.2 Disparition de bulles par coalescence

Une bulle de rayon $\in [R_0, R_0 + dR_0]$ peut disparaître en coalesçant avec une bulle de taille quelconque, et il est clair que leur nombre est donné en intégrant (5.93) entre 0 et $+\infty$ d'où les variations de $N(R_0)$ correspondantes

$$\left.\frac{dN(R_0)}{dt}\right|_{\text{disparues}} = -N(R_0)\underbrace{\int_0^{\infty} \sigma v_0 \; N(R_{0_1})dR_{0_1}}_{\mathcal{C}_{\text{disp}}(P,\boldsymbol{\nabla}P,R_0,N)} \quad (5.97)$$

5.4.4.3 Synthèse

A partir d'un modèle simple de la force d'attraction entre deux bulles, et toujours dans le cadre linéaire, nous avons donc obtenu l'évolution par coalescence d'une population de bulles définie par sa fonction de distribution $N(R_0)$. Nous résumerons les résultats obtenus si dessus sous la forme

$$\left.\frac{dN(R_0)}{dt}\right|_{\text{coalescence}} = \underbrace{\mathcal{C}_{\text{app}}(P, \boldsymbol{\nabla}P, R_0, N)}_{C^+} - \underbrace{N(R_0)\,\mathcal{C}_{\text{disp}}(P, \boldsymbol{\nabla}P, R_0, N)}_{C^-} \quad (5.98)$$

où $\mathcal{C}_{\text{app}}$ et $\mathcal{C}_{\text{disp}}$ sont deux opérateurs intégraux, dépendant du rayon R_0 des bulles dans la classe considérée, de l'amplitude la pression locale P, de son gradient $\boldsymbol{\nabla}P$, et enfin de la fonction de distribution de taille $N(R)$ de *l'ensemble de la population.*

5.5 Fragmentation

Le phénomène de fragmentation de bulles de cavitation peut intervenir dans trois cas distincts :
– pour des bulles en fin d'implosion,
– pour des bulles oscillant de manière stable,
– pour des bulles implosant au voisinage d'une paroi solide.
Si le dernier phénomène revêt une importance capitale pour les effets mécaniques de la cavitation, nous pensons que son effet global sur la population de bulles est anecdotique, puisqu'il se produit uniquement au voisinage des parois. Nous nous intéresserons donc uniquement aux deux premiers, susceptibles d'intervenir dans la masse du liquide.

Pour intégrer le phénomène de fragmentation à une équation de conservation globale, il faut pouvoir répondre aux deux questions suivantes :
– sous quelles conditions une bulle se fragmente-t-elle ?
– quel est le nombre de bulles résultant de la fragmentation, et quelle est leur taille ?
Quel que soit le type de la fragmentation, elle est toujours liée à l'apparition d'oscillations de surface de la bulle. Nous proposons donc tout d'abord un bref rappel théorique sur la stabilité d'une interface sphérique, puis nous envisagerons séparément l'occurrence de la fragmentation pour des bulles en implosion ou stables.

5.5.1 Rappels théoriques

5.5.1.1 Stabilité linéaire d'une interface.

L'instabilité d'une surface plane séparant deux fluides de densités différentes, connue sous le nom d'instabilité de Rayleigh-Taylor, intervient lorsque l'accélération est dirigée du fluide le plus léger vers le plus lourd.

L'extension de ce résultat à une interface sphérique a été étudiée initialement par Plesset (1954); Plesset and Mitchell (1956), en écrivant le rayon de la bulle local sous la forme [6] :

$$r_s(t;\theta,\phi) = R(t) + \sum_{n=2}^{\infty} y_n(t) Y_n^0(\theta) \tag{5.99}$$

6. La série commence à 2 car l'harmonique 1 correspond à un mouvement de translation d'ensemble de la bulle

où les fonctions $Y_n^0(\theta)$ sont les harmoniques sphériques axisymétriques Morse and Feshbach (1953) (voir annexe D). Pour des perturbations infinitésimales ($|y_n(t)| \ll R(t)$) et en écoulement potentiel, l'évolution temporelle de chaque coefficient $y_n(t)$ est régie par l'équation différentielle

$$\ddot{z}_n + \left[\frac{(n+2)(n^2-1)\sigma}{2R^3} - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\ddot{R}}{R}\right] z_n = 0$$

$$\text{où} \qquad z_n(t) = y_n(t)\left(\frac{R(t)}{R_0}\right)^{3/2} \tag{5.100}$$

L'étude de stabilité linéaire consiste à examiner si les solutions de ces équations tendent à croître où à décroître. Dans le premier cas, cela signifie qu'une perturbation infinitésimale de la surface aura tendance à «exploser» : l'interface est instable. Dans ce cas l'amplitude $y_n(t)$ peut prendre des valeurs très élevées, rendant ainsi l'hypothèse de faibles perturbations invalide.

Les effets non-linéaires devraient alors être pris en compte pour obtenir le comportement ultime de l'interface, et cette étude est en générale bien plus délicate que l'analyse de stabilité linéaire.

5.5.1.2 Influence de la viscosité

Prosperetti (1977a); Prosperetti and Seminara (1978) ont étendu l'étude de Plesset and Mitchell (1956) en prenant en compte la viscosité du liquide environnant. Les corrections à l'équation (5.100) contiennent des termes intégraux liés physiquement à la diffusion de la vorticité créée à l'interface. Cette équation peut éventuellement se simplifier sous l'hypothèse que la bulle ne se contracte pas trop violemment. Pour nos besoins ultérieurs, nous présentons l'équation obtenue par les auteurs en fonction de la même variable z_n que pour le cas inviscide :

$$\begin{aligned}&\ddot{z}_n + \frac{2(n+2)(2n+1)}{R^2}\dot{z}_n \\ &+\left[\frac{(n+2)(n^2-1)\sigma}{2R^3} - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\ddot{R}}{R} - (n+2)(4n+5)\nu\frac{\dot{R}}{R^3}\right] z_n = 0\end{aligned} \tag{5.101}$$

5.5.2 Fragmentation d'une bulle implosant

5.5.2.1 Stabilité

Les travaux de Plesset (1954); Plesset and Mitchell (1956) concernaient la stabilité linéaire d'une bulle de vapeur en contraction ou en expansion sous l'influence d'une différence de pression constante entre l'intérieur de la bulle et l'extérieur. Les auteurs, en résolvant l'équation (5.100) montrent que :

- Une bulle en expansion est stable sous réserve que la tension superficielle soit suffisamment importante.
- Une bulle en contraction est toujours instable, et l'hypothèse linéaire reste approximativement valable pendant la première phase de la contraction telle que $R/R_0 \geq 0.2$. A mesure que le rayon tend vers 0, les harmoniques développent des oscillations de fréquence et d'amplitude croissante, cette dernière croissant en $R^{-1/4}$.

Ce dernier cas a été traité numériquement par Chapman and Plesset (1972) qui montrent que le domaine de validité de l'analyse de stabilité linéaire est plus large que prévu. En fin de contraction l'harmonique a_2 prend une amplitude du même ordre de grandeur que R, ce qui conduit à des formes de bulles «écrasées» accompagnés de jets de liquides.

Prosperetti and Seminara (1978) montrent que dans le cadre d'une bulle en implosion, l'effet de la viscosité consiste essentiellement à retarder le développement des harmoniques sphériques d'ordre élevé. Cette conclusion est importante puisqu'elle indiquerait que le nombre de bulles issues de la fragmentation serait assez faible.

5.5.2.2 Définition d'un seuil

La transposition de ces résultats à une bulle de cavitation acoustique n'est pas immédiate, et survient la difficulté de définir précisément une bulle en implosion, autrement dit un seuil de cavitation instable.

Dans une première approche, il est possible de prendre le seuil de Blake, et nous nous cantonnerons à ce choix dans la suite de cette étude.

A plus long terme, une approche numérique du problème inspirée de Church (1988) nous semblerait particulièrement intéressante : l'auteur prend comme critère $R_{\max}/R_0 \geq 2$, et calcule numériquement le seuil en résolvant une équa-

tion de dynamique de bulle pour différentes valeurs des paramètres (P, R_0), à fréquence f fixée.

Dans le même ordre d'idée, nous suggérerions la méthode suivante : la partie lourde du calcul consistant à résoudre numériquement l'équation radiale en balayant le plan (R_0, P), on pourrait reporter les grandeurs $R(t)$ obtenues dans une équation du type (5.101), et calculer l'évolution sur une période acoustique des amplitudes y_n des premiers harmoniques sphériques. En se fixant un seuil sur cette amplitude, on pourrait obtenir ainsi un seuil de fragmentation tenant compte précisément du mécanisme mis en jeu.

5.5.2.3 Bilan

Pour résumer cette discussion, et l'utiliser dans le cadre d'une équation de conservation du nombre de bulles, on peut écrire la condition de seuil de fragmentation instable sous la forme générique :

$$\epsilon_i(R_0, P) = \begin{cases} 1 & \text{si la bulle est instable} \\ 0 & \text{si la bulle est stable} \end{cases} \tag{5.102}$$

Nous considérerons donc que toutes les bulles excitées au-delà de ce seuil se fragmentent sur une période acoustique, et donnent naissance à m bulles de taille identique (comme nous l'avons mentionné, les travaux de Prosperetti and Seminara (1978) suggèrent une valeur assez faible pour cet entier).

Si n bulles de rayon R_0 se fragmentent sur une période acoustique, leur taux de disparition par unité de temps est fn, où f est la fréquence acoustique. Dans ces conditions, les variations de la fonction de distribution de taille liée à la disparition par fragmentation s'écrivent :

$$\left.\frac{dN(R_0)}{dt}\right|_{\text{disparues}} = -\underbrace{f\epsilon_i(R_0, P)N(R_0)}_{F_i^-(R0,P)} \tag{5.103}$$

De plus, des bulles de rayon R_0 peuvent apparaître comme produit de fragmentation de bulles plus grosses, et les variations de N correspondantes s'écrivent donc :

$$\left.\frac{dN(R_0)}{dt}\right|_{\text{apparues}} = \underbrace{fm\epsilon_i(m^{1/3}R_0, P)N(m^{1/3}R_0)}_{F_i^+(R_0,P)} \tag{5.104}$$

5.5.3 Fragmentation d'une bulle stable

5.5.3.1 Oscillations paramétriques

Si la bulle oscille de manière stable, le rayon de la bulle $R(t)$ est une fonction périodique du temps, et l'équation (5.100) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{d^2 z_n}{d\theta^2} + g(2\theta)\, z_n = 0 \qquad \text{avec} \qquad \theta = \frac{1}{2}\omega t \tag{5.105}$$

Il s'agit d'une équation de Hill, dont on peut montrer que les solutions s'écrivent :

$$z_n = \exp\left(\mu_n \theta\right) Q_n(\theta) \tag{5.106}$$

où Q_n est une fonction périodique de θ. Le facteur exponentiel conduit selon le signe de μ_n à une croissance infinie de z_n, auquel cas il y a instabilité, ou à une décroissance vers 0, auquel cas l'interface est stable. Ce type d'instabilité s'appelle *phénomène d'amplification paramétrique.*

Les conditions d'instabilités peuvent en théorie être déterminées une fois la fonction g connue. Pour des oscillations de bulles d'amplitudes modérées, et loin des différentes résonances linéaire et non-linéaires du mouvement radial, le rayon de la bulle, peut être développé en série de Fourier, sous la forme

$$\frac{R}{R_0} = 1 + X^2 r_0 + X \cos\omega t + X^2 r_2 \cos 2\omega t + X^3 r_3 \cos 3\omega t + \dots \tag{5.107}$$

et sous l'hypothèse X petit devant 1, l'équation (5.105) peut s'écrire

$$\frac{d^2 z_n}{d\theta^2} + \left(g_n^0 + g_n^1 \cos 2\theta + g_n^2 \cos 4\theta + \dots\right) z_n = 0 \tag{5.108}$$

les coefficients g_n^k s'exprimant en fonction des puissances de l'amplitude X de l'harmonique 1 de la bulle. L'expression des coefficients g_n^0 à g_n^3 sont donnés jusqu'à l'ordre 3 en X dans Eller and Crum (1970). Notons que le coefficient constant g_n^0 vaut, à des termes en X^2 près

$$g_n^0 = \left(\frac{2\omega_n}{\omega}\right)^2 \tag{5.109}$$

où

$$\omega_n = \left[\frac{(n+2)(n^2-1)\sigma}{\rho R_0^3}\right]^{1/2} \tag{5.110}$$

qui représente la fréquence de résonance du n^{ème} mode sphérique.

Si l'on néglige tous les termes à partir de l'ordre X^2, seuls les coefficients g_n^0 et g_n^1 subsistent et l'équation (5.108) se ramène alors une équation de Mathieu :

$$\frac{d^2 z_n}{d\theta^2} + (a_n + \epsilon_n \cos 2\theta)\ z_n = 0 \tag{5.111}$$

avec

$$a_n = \left(\frac{2\omega_n}{\omega}\right)^2 \tag{5.112}$$

$$\epsilon_n = X\left[4\left(n + \frac{1}{2}\right) - 3a_n\right] \tag{5.113}$$

Il est connu que les domaines d'instabilité de cette équation dans le plan (a, ϵ) sont issus des points $(j^2, 0)$ où j est un entier (figure 5.14), et qu'au voisinage de ces points, la solution instable prend la forme

$$z_n = \exp(\mu_n \theta) \cos j\theta \tag{5.114}$$

Plus concrètement, cela signifie que pour des valeurs de la fréquence ω telles que $j\omega \simeq 2\omega_n$, des oscillations de surface instable à la fréquence $j\omega/2$ peuvent être engendrées. Le cas $j = 1$ correspond à des oscillations de surface à la fréquence $\omega/2$, donc sous-harmoniques, $j = 2$ correspond à des oscillations de surface à la fréquence ω dites «synchrones» etc..., les domaines d'instabilité étant de plus en plus restreints pour des valeurs de j croissantes.

5.5.3.2 Effet de la viscosité.

On voit en comparant les équations (5.100) de Plesset and Mitchell (1956) et (5.101) de Prosperetti and Seminara (1978) que la viscosité implique un terme d'amortissement supplémentaire d'une part et modifie le coefficient de z_n d'autre part. L'équation de Mathieu (5.111) devient alors

$$\frac{d^2 z_n}{d\theta^2} + 2b_n \frac{dz_n}{d\theta} + (a_n + \epsilon_n \cos 2\theta + \delta_n \sin 2\theta)\ z_n = 0 \tag{5.115}$$

avec

$$b_n = 2(n+2)(2n+1)\frac{\nu}{\omega R^2} \tag{5.116}$$

$$\delta_n = X\left[\frac{4\nu}{\omega R_0^2}(n+2)(4n+5)\right] \tag{5.117}$$

Nous avons pu vérifier que δ_n était négligeable dans la plupart des cas devant ϵ_n et nous négligerons ce terme par la suite. L'effet essentiel de la viscosité est donc l'introduction d'un terme d'amortissement supplémentaire b_n [7].

7. Notons au passage que b_n et δ_n varient en $1/Re$ où $Re \sim \omega(R_0/n)^2/\nu$ représente un nombre de Reynolds lié au mouvement de la surface. Si l'on voit l'oscillation surfacique

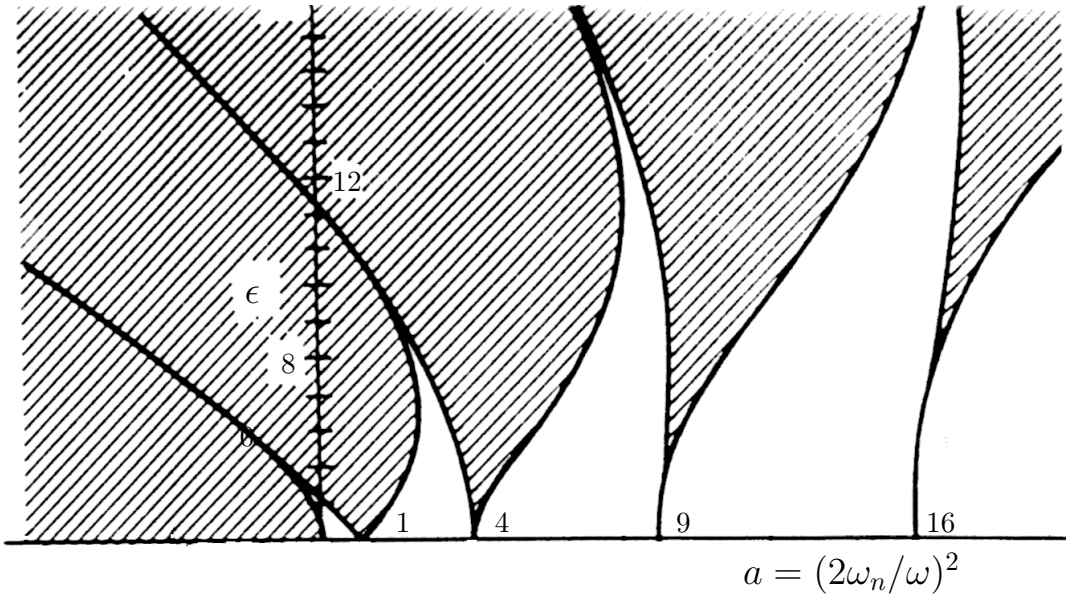


FIGURE 5.14 – Stabilité de l'équation de Mathieu Bender and Orszag (1978). Le domaine hachuré représente les zones instables, le domaine en blanc les zones stables.

5.5.3.3 Seuil d'oscillations instables

Si nous considérons que le problème est correctement décrit par l'équation de Mathieu, la détermination du seuil revient à calculer les frontières de la figure (5.14). Qualitativement, on voit qu'au voisinage d'une langue d'instabilité issue de $(j^2, 0)$, l'instabilité apparaît si ϵ dépasse une certaine valeur critique. Or dans notre cas, ϵ_n est proportionnel à l'amplitude X du mouvement radial de la bulle. Cela signifie que l'instabilité de surface apparaît au delà d'un certain seuil d'amplitude de l'oscillation de la bulle, que l'on peut rapporter par (5.3) à l'amplitude P de la pression acoustique excitant cette bulle.

On peut donc calculer pour chaque mode d'oscillation sphérique n, la pression acoustique minimale $P_{j,n}(R_0)$ nécessaire pour exciter l'instabilité associée à l'accrochage $j\omega = 2\omega_n$ sur une bulle de rayon R_0. En prenant le plus petit des seuils $P_{j,n}$ obtenus pour toutes les combinaisons (j, n) possibles, on obtient une courbe $P = f(R_0)$ indiquant la pression acoustique minimale pour faire apparaître une instabilité de surface sur une bulle de rayon R_0.

Cette méthode a été utilisée par Eller and Crum (1970), qui préfèrent baser

comme une série de n^2 «bosses» réparties sur la surface de la bulle, la taille caractéristique de la perturbation est bien R_0/n et la vitesse liée à l'oscillation $\omega R_0/n$.

leur calcul sur l'équation de Hill (5.108), en conservant tous les termes jusqu'à $\cos 6\theta$, les coefficients g_n^k étant calculé jusqu'à l'ordre $O(X^3)$. Ils examinent tous les accrochages possibles des modes surfaciques $n = 2, 3, 4$ avec $2\omega = j\omega_n$ pour $j = 1, 2, 3$ correspondant à des fréquences d'oscillations $\omega/2, \omega$ et $3\omega/2$.

Le seuil d'accrochage est déterminé en écrivant que l'amortissement $\exp(-b_n\theta)$ impliqué par la viscosité (équation (5.115)) compense juste l'amplification paramétrique $\exp(\mu_n\theta)$, soit

$$\mu_n > \alpha_n$$

Le paramètre μ_n est calculé par les auteurs en fonction des g_n^k d'après Hayashi (1964). Nous reproduisons figure (5.15) le seuil d'instabilité dans le plan (R_0, P) obtenu par les auteurs. Celui-ci est comparé à deux autres expressions du seuil :

- celle de Hsieh and Plesset (1961), qui considèrent uniquement le mode $n = 2$ et prennent comme critère d'instabilité approximatif $g(\theta) = a_n + \epsilon_n \cos 2\theta < 0$, soit

  $$a_n < \epsilon_n$$

  soit, après simplification

  $$\frac{12\sigma}{\rho R_0^3} \leq \frac{5}{2} X\omega^2 \tag{5.118}$$

  Notons que Alekseev and Yushin (1986) proposent le même type de condition.
- celle calculée par l'équation de Mathieu, afin de vérifier la validité de cette dernière par rapport à celle de Hill. Le principe de calcul est le même, et les μ_n sont calculés d'après Abramowitz and Stegun (1964).

5.5.3.4 Instabilité de surface implique fragmentation ?

Le seuil d'apparition des ondes de surface étant connu, on peut alors se demander si l'apparition de ces ondes conduit obligatoirement à la fragmentation de la bulle.

La réponse est non, et cette question est en rapport avec un phénomène communément observé dans les expériences de cavitation : pour une pression acoustique suffisante, certaines bulles acquièrent un mouvement de translation désordonné, appelé «mouvement erratique».

Le lien entre ce mouvement erratique et l'apparition d'oscillations de surface a été suggéré initialement par Strasberg and Benjamin (1958), et Crum and Eller (1970), qui l'observent dans leurs expériences de lévitation en fournissent pour la première fois une preuve quantitative Eller and Crum (1970) :

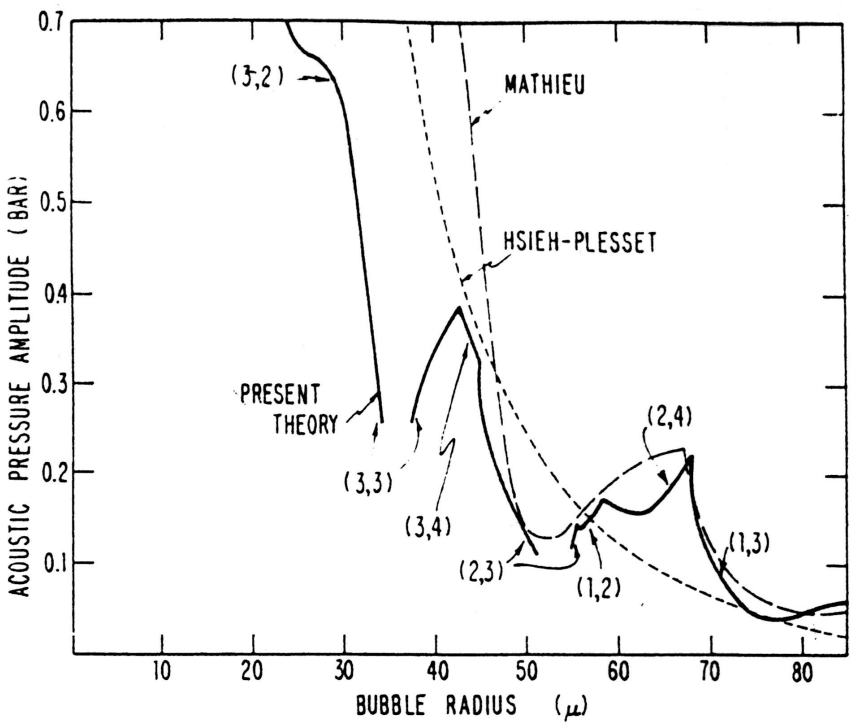


FIGURE 5.15 – D'après Eller and Crum (1970) : en traits pleins : seuil d'instabilité de surface calculé d'après l'étude de stabilité de l'équation (5.108). Les auteurs comparent ce seuil à celui calculé par l'équation de Mathieu et celui de Hsieh and Plesset (1961).

ils tracent dans le plan (R_0, P) une frontière obtenue expérimentalement, au delà de laquelle la bulle maintenue en lévitation présente un mouvement erratique, et comparent ensuite cette frontière avec le seuil d'instabilité de surface de la figure (5.15). Les auteurs obtiennent une corrélation acceptables et confirment l'hypothèse initiale de Strasberg and Benjamin (1958).

Sur le plan théorique, Hall and Seminara (1980) ont effectué une analyse de stabilité non-linéaire des oscillations de surface, et mis en évidence les couplages possibles entre plusieurs modes surfaciques oscillant de manière sous-harmonique (à $\omega/2$) ou synchrone (à ω). Dans les deux cas, les auteurs montrent une saturation non-linéaire possible dans les zones d'instabilité linéaire. Cette étude ne conclue pas sur le lien entre mouvement erratique et instabilité de surface, mais montre que l'instabilité prédite dans le cadre linéaire peut être saturée, et ne conduit donc pas nécessairement à la fragmentation.

Enfin des études plus récentes Benjamin and Ellis (1990); Zardi and Seminara (1995) fournissent une interprétation théorique correcte du mouvement erratique en termes de couplages non-linéaires entre différents modes surfaciques.

5.5.3.5 Choix final d'un seuil de fragmentation

Les résultats précédents soulignent donc que l'apparition d'instabilités de surface n'implique pas forcément la fragmentation de la bulle. Cependant, notons que les développements théoriques mentionnés ci-dessus sont effectués suffisamment loin des résonances linéaire et non-linéaires du mouvement radial pur.

En fait, une bulle excitée au voisinage de ces résonances entreprend des oscillations radiales de grande amplitude, et est donc d'autant plus sujette à des oscillations de surface importantes. Ces dernières seront vraisemblablement d'autant plus instables que la tension superficielle joue un rôle négligeable, et donc que la bulle est grosse. On peut donc pressentir qu'une bulle excitée au voisinage de sa fréquence de résonance radiale principale représente la candidate idéale à la fragmentation.

Pour avoir un ordre de grandeur, on peut se demander par exemple ce qui arriverait à une bulle ayant grossi par diffusion rectifiée jusqu'à la taille de résonance pour une fréquence d'excitation $f = 20$ kHz. Une telle bulle aurait un rayon d'équilibre de l'ordre de 160 μm, et la formule (5.110) montre

qu'un accrochage sous-harmonique du mode 6 correspond à une fréquence $f = 22010$ Hz et un accrochage synchrone du mode 9 à $f = 19510$ Hz.

Il est donc raisonnable de penser que la fragmentation de bulles stables concerne essentiellement les bulles au voisinage de la taille de résonance, et éventuellement celles de taille supérieure. Dans la mesure où les modes surfaciques concernés sont d'ordre assez élevés, cette conclusion serait en accord avec le phénomène l'émission de micro-bulles, observé notamment par Neppiras (1980).

Pour obtenir une expression simple du seuil, nous décrivons simplement le phénomène par l'équation de Mathieu amortie (5.115), et nous considérons seulement les instabilités de surface liées à des accrochages sous-harmoniques, c'est-à-dire le cas $j = 1$. Une expression analytique du seuil pour chaque mode n peut être obtenue par une méthode des échelles multiples, et s'exprime sous la forme :

$$|X| > \frac{2\sqrt{4b_n^2 + (a_n - 1)^2}}{2(2n-1) - 3a_n}$$

Notons que cette expression n'est valable qu'au voisinage du point d'accrochage, c'est-à-dire pour a_n assez proche de 1. En ramenant ce seuil à une condition sur la pression acoustique, on obtient

$$P > P_{1,n}(R_0) = \frac{1}{|\gamma|}\frac{2\sqrt{4b_n^2 + (a_n - 1)^2}}{2(2n-1) - 3a_n} \tag{5.119}$$

Le seuil d'instabilité global est ensuite défini comme le minimum de ces seuils, soit

$$P_{\text{seuil}} = \min_n P_{1,n} \tag{5.120}$$

La figure 5.16 montre le seuil obtenu pour une fréquence d'excitation de 20 kHz ($R_{\text{res}} \simeq 158\ \mu m$) pour des bulles de rayon compris entre 40 μm et $2R_{\text{res}}$. On voit qu'au voisinage de la taille de résonance, le seuil d'apparition des modes 5 et 6 est très faible, de l'ordre de 0.01 bar.

Le problème maintenant est de savoir, comment décider qu'il y a fragmentation ou non, pour une bulle de rayon R_0 donné excitée par une pression au delà de ce seuil. Il n'existe pas de réponse simple à cette question, mais l'analyse bibliographique précédente semble indiquer que des bulles de taille très inférieure à la taille résonance conserveront leur intégrité et entreprendront un mouvement erratique. Cela signifie que pour de telles bulles, il existerait éventuellement un deuxième seuil plus élevé au delà duquel elles se fragmenteraient. Les ordres de grandeurs de la figure (5.15) permettent de penser que ce seuil ne serait pas trop éloigné du seuil de Blake, pour lequel la bulle

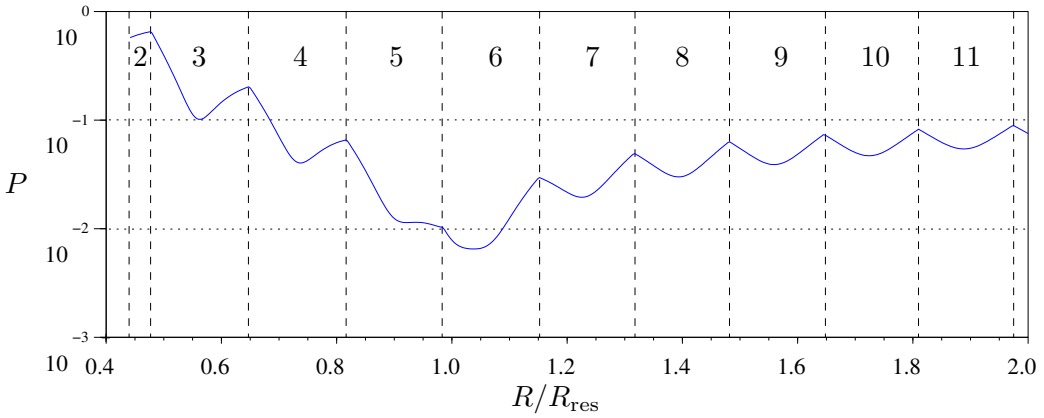


FIGURE 5.16 – Seuil d'accrochage sous-harmonique prédit par l'équation de Mathieu pour des bulles autour de la taille de résonance. Les labels pour chaque domaine indiquent l'ordre n du mode excité.

se fragmenterait à cause de son implosion plutôt que par une amplification paramétrique.

Nous pourrions donc considérer de façon empirique, que les seuls modes d'oscillation surfaciques conduisant à la fragmentation de bulles stables, sont ceux correspondant à des tailles de bulles au voisinage de la taille de résonance, ou supérieures à cette taille. Sur la figure 5.16, cela revient à ne conserver que les tranches 5, 6, etc. . . .

La question d'un choix judicieux d'un seuil de fragmentation reste ouverte, et pour les illustrations graphiques des sections suivantes, nous conserverons le seuil de la figure 5.16, tout en sachant que cette courbe représente une borne inférieure du seuil réel.

5.5.3.6 Produit de fragmentation

Il reste un problème à résoudre dans l'optique d'un bilan de population de bulles : quel est le nombre et la taille des bulles issues de la fragmentation.

Un critère couramment employé Neppiras (1980) fournit le diamètre des bulles éjectées R_e comme le quart de la longueur d'onde de l'oscillation surfacique, cette dernière étant définie par

$$\lambda_s = \frac{2\pi R}{n}$$

soit

$$R_e = \frac{\pi}{4n} R_0 = e_n R_0 \tag{5.121}$$

Une estimation du nombre de bulles éjectées n'apparaît à notre connaissance nulle part dans la littérature. Pour en trouver une estimation, il faudrait, en utilisant un langage imagé, connaître le nombre de «bosses» présentées par la surface de la bulle au cours de ses oscillations.

En fait, l'équation de départ (5.100) n'est pas seulement valable pour les modes de déformation axisymétriques, définis par les harmoniques Y_n^0, mais plus généralement pour tous les modes harmoniques sphériques $Y_n^m, m = -n \dots n$ (voir annexe D), sous réserve que les déformations soient petites. Les seuils d'instabilités calculés précédemment sont donc les mêmes pour ces derniers.

La figure 5.17 montre l'allure des fonctions Y_6^m pour tous les modes $m = 0 \dots 6$. Nous avons pu déterminer empiriquement que le nombre de bosses dans le mode Y_n^m était égal à $m(n - m + 1)$ (une démonstration rigoureuse de ce résultat existant certainement). Mais les déformations d'une bulle entreprenant des oscillations de surface dans le $n^{\text{ème}}$ mode doivent être vues comme une combinaison linéaire de ces fonctions, et il est vraisemblable que le nombre de «bosses», et donc de micro-bulles éjectées varie approximativement comme n^2.

Pour formaliser un bilan de bulles lors de la fragmentation, nous écrirons que le nombre de bulles éjectées est égal à an^2, où a est une constante de proportionnalité. Dans ces conditions le rayon de la bulle subsistant après la fragmentation est donné par

$$R_s = \left[1 - a\,(\pi/4)^3 \frac{1}{n}\right]^{1/3} R_0 = s_n R_0 \tag{5.122}$$

5.5.3.7 Bilan

Comme pour la fragmentation instable nous définissons une fonction $\epsilon_s(R_0, P)$ égale à 1 si P est supérieure au seuil de fragmentation d'une bulle de rayon R_0, défini par exemple par (5.120), et 0 sinon.

Nous considérons ensuite qu'une bulle excitée au-delà de ce seuil se fragmente sur une période acoustique, et les variations de la fonction de distribution

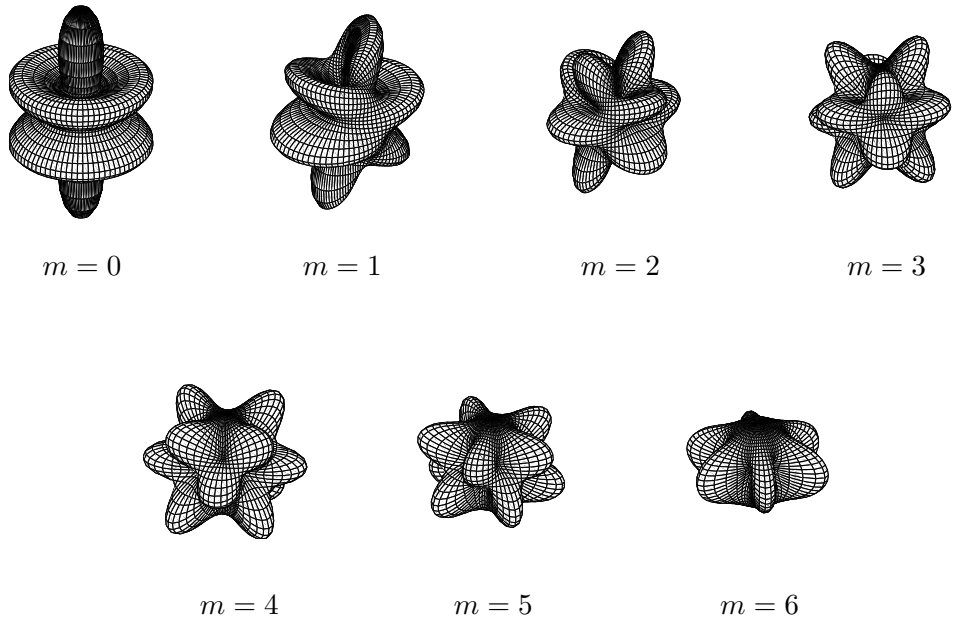


FIGURE 5.17 – Déformation d'une bulle entreprenant des oscillations de surface dans le mode Y_6^m, pour $m = 0 \ldots 6$. Le mode Y_6^0 correspond à une déformation axisymétriques.

$N(R_0)$ liées à la disparition par fragmentation s'écrivent donc :

$$\left.\frac{dN(R_0)}{dt}\right|_{\text{disparues}} = -\underbrace{fN(R_0)\epsilon_s(R_0, P)}_{F_s^-(R_0,P)} \tag{5.123}$$

Mais une bulle de rayon R_0 peut également apparaître si elle est le résultat de la fragmentation d'une bulle de taille supérieure. Elle peut être alors :

– soit une micro-bulle éjectée d'une bulle de rayon R_0/e_n
– soit la bulle subsistant après fragmentation d'une bulle de rayon R_0/s_n

Les variations correspondantes de $N(R_0$ s'écrivent donc :

$$\left.\frac{dN(R_0)}{dt}\right|_{\text{apparues}} = \underbrace{f\sum_n \left[an^2\epsilon_s\left(\frac{R_0}{e_n}, P\right)N\left(\frac{R_0}{e_n}\right) + \epsilon_s\left(\frac{R_0}{s_n}, P\right)N\left(\frac{R_0}{s_n}\right)\right]}_{F_s^+(R_0,P)} \tag{5.124}$$

5.5.4 Synthèse

En combinant les résultats (5.103), (5.104) liés à la fragmentation instable, et (5.123), (5.124) pour la fragmentation stable, on obtient les variations temporelles de la fonction de distribution de tailles de bulles sous la forme

$$\left.\frac{dN(R_0)}{dt}\right|_{\text{fragmentation}} = F_i^+ - F_i^- + F_s^+ - F_s^- \tag{5.125}$$

5.6 Evolution globale de la population de bulle

5.6.1 Equation de conservation

Nous avons identifié dans les sections précédentes 4 phénomènes susceptibles de faire évoluer la population de bulles au cours du temps

- En un point donné, le nombre de bulles d'une classe $[R_0, R_0 + dR_0]$ varie au cours du temps à cause des bulles des classes voisines qui augmentent ou diminuent leur rayon par diffusion rectifiée ou dissolution.
- Pour un rayon donné, la variation du nombre de bulles dans un petit volume dV est égal au nombre de bulles qui traversent la frontière délimitant ce volume sous l'influence des forces de Bjerknes et de la poussée d'Archimède.
- La coalescence de deux bulles de rayons inférieurs à R_0 peut enrichir la classe $[R_0, R_0 + dR_0]$, et cette dernière peut aussi s'appauvrir lorsqu'une bulle de rayon R_0 coalesce avec une autre.
- Enfin la classe $[R_0, R_0 + dR_0]$ peut s'enrichir lorsque le résidu de la fragmentation d'une bulle plus grosse donne naissance à des bulles de rayon R_0 ou bien au contraire s'appauvrir lorsqu'une bulle de rayon R_0 se fragmente.

La figure 5.18 illustre ces arguments qualitatifs. Les sections précédentes nous ont fourni également la vitesse de translation $\mathbf{v}$ des bulles (5.65), le taux de croissance w par diffusion rectifiée (5.23), les taux de disparition et d'apparition de bulles dans une classe donnée par coalescence (5.98), fragmentation instable (5.103), (5.104), et fragmentation stable (5.123), (5.124).

Les variations temporelles de la fonction de distribution de taille des bulles peuvent donc être écrites sous la forme d'une équation de conservation :

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} + \operatorname{div}(N\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial R_0}(Nw) = C^+ - C^- + F_i^+ - F_i^- + F_s^+ - F_s^- \tag{5.126}$$

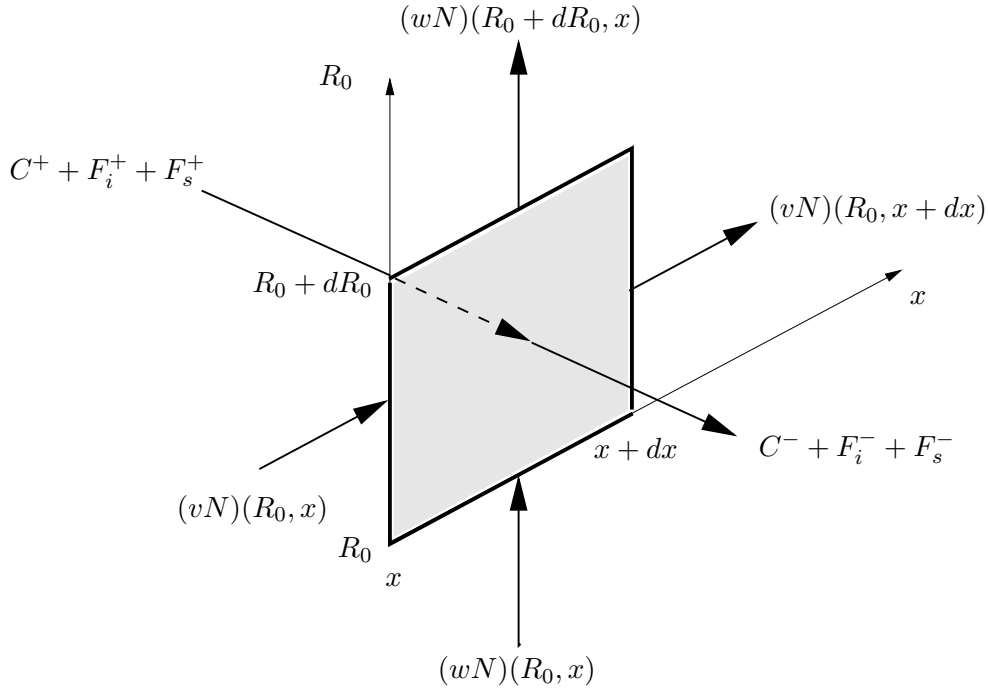


FIGURE 5.18 – Illustration de l'équation de conservation du nombre de bulles. Les flèches parallèles à l'axe x symbolisent la migration sous l'influence des forces de Bjerknes, celles parallèles à l'axe R_0 représentent la dissolution ou la diffusion rectifiée, et les deux autres, les bulles de rayon R_0 apparaissant ou disparaissant par coalescence, fragmentation stable et instable.

Dans cette équation, les deuxième et troisième termes sont des termes de flux en fonction des variables généralisées $(\mathbf{x}, R_0) = (x, y, z, R_0)$, et les termes du second membre sont des termes sources et puits.

Il convient de noter que le temps t considéré dans cette équation est grand devant la période d'oscillation, dans la mesure où des grandeurs comme le taux de croissance des bulles ou leur vitesse de translation ont été calculées par moyennage sur plusieurs périodes acoustiques. Cette équation reflète en quelque sorte le comportement global de la population de bulles telle qu'elle pourrait être mesurée par l'expérimentateur.

Si le profil de pression acoustique $P(\mathbf{x})$ est connu, la fonction $N(R_0, \mathbf{x})$ est entièrement déterminée par la résolution de l'équation (5.126). Mais les caractéristiques acoustiques du milieu, et donc le profil $P(\mathbf{x})$, varient en fonction de la densité locale de bulles, donc en fonction de $N(R_0, \mathbf{x})$.

Nous examinons maintenant dans quelle mesure l'équation de conservation dérivée ci-dessus peut être couplée avec une équation de propagation dans un liquide à bulles.

5.6.2 Couplage avec l'équation de propagation

Nous avions vu au chapitre 2 que le modèle de Caflish généralisé au cas de populations de bulles inhomogènes et polydisperses pouvait s'écrire sous la forme d'une équation de Helmholtz dont le nombre d'onde k est variable dans l'espace :

$$\nabla^2 P + k^2(\mathbf{x}) P = 0 \tag{5.127}$$

avec

$$k^2(\mathbf{x}) = \frac{\omega^2}{c_l^2} + 4\pi\omega^2 \int_0^\infty \frac{R_0}{\omega_0^2(R_0) - \omega^2 - 2ib(R_0)\omega} N(\mathbf{x}, R_0)\, dR_0 \tag{5.128}$$

Rappelons que cette équation résulte de la linéarisation du modèle de Caflish, en supposant toutes les grandeurs sinusoïdales à la fréquence de l'excitation. Elle n'est donc valable que si k^2 et donc $N(R_0, \mathbf{x})$ est indépendante du temps.

Cela dit, si la population de bulles évolue sur une échelle de temps très grande devant la période acoustique, cette équation reste encore approximativement valable, car les variations de $k(\mathbf{x})$ sur une période sont alors négligeables (on pourrait formaliser cet argument avec une méthode des échelles multiples). Or, comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, l'échelle de temps τ intervenant dans l'équation de conservation intègre un grand nombre

de périodes acoustiques, et vérifie donc cette propriété. Nous pouvons donc considérer le profil de pression $P(\mathbf{x})$ comme une fonction aussi de τ, et garder l'équation (5.127).

Cette équation fournit implicitement le profil de pression $P(\mathbf{x})$ en fonction de la fonction de distribution $N(R_0, \mathbf{x})$, et représente l'action des bulles sur l'onde acoustique. A l'inverse, l'équation (5.126) fournit implicitement la fonction de distribution $N(R_0, \mathbf{x})$ en fonction du profil de pression $P(\mathbf{x})$, et représente l'action de l'onde acoustique sur les bulles.

Les équations (5.126)-(5.127) forment donc un système couplé, qui, s'il pouvait être résolu, fournirait en théorie d'une part le profil de pression $P(\mathbf{x}, \tau)$, et d'autre part la fonction de distribution de taille des bulles $N(R_0, \mathbf{x}, \tau)$.

5.6.3 Résolution numérique : un objectif illusoire ?

Notre ambition initiale était d'obtenir, en sacrifiant à l'hypothèse linéaire, des équations suffisamment simples pour prédire la population de bulles et la pression acoustique en tout point du milieu. Il convient de remarquer que malgré le grand nombre d'approximations effectuées, le système d'équations obtenu présente une forme encore extrêmement complexe, bien trop complexe même pour être traité numériquement. Nous indiquons ci-dessous quelques raisons à cela, en ne considérant que le problème monodimensionnel.

Sur le plan mathématique, l'équation de conservation (5.126) constitue un problème instationnaire, à 2 «dimensions», x et R_0, et inhomogène à cause des termes sources et puits. L'équation de propagation (5.127) constitue, dans une géométrie fermée, un problème aux limites, non-linéaire puisque k dépend de x. Ajoutons que les deux équations sont couplées, et doivent être résolues simultanément.

Un premier problème est lié au fait que la variable R_0 varie a priori dans $[0, +\infty]$, De ce fait, la discrétisation de cette variable est problématique, et son domaine de définition doit être limité par deux valeurs extrêmes $R_{0_{\min}}$ et $R_{0_{\max}}$; $R_{0_{\min}}$ devrait correspondre à des bulles qui se dissolvent de toutes façons, et $R_{0_{\max}}$ à des bulles dont la vitesse ascensionnelle est suffisamment élevée pour que leur durée de vie dans le milieu soit très brève.

Notons également que les termes de coalescence sont extrêmement délicats, car leur effet sur l'évolution d'une classe R_0 donnée implique une intégration sur toutes les autres classes. Les termes de fragmentation quant à eux posent problème en raison de la dynamique extrêmement rapide qu'ils imposent

au système global, les bulles étant supposées se fragmenter sur une période acoustique.

Pour résoudre certains problèmes, par exemple pour déterminer comment s'établit un champ de cavitation à partir d'une distribution initiale de germes de gaz dans le liquide, l'instationnarité du problème doit être prise en compte, et la dérivée temporelle dans (5.126) doit être conservée. Quelques essais préliminaires en ne prenant en compte que la diffusion rectifiée et les forces de Bjerknes nous ont montré qu'un problème d'instabilité numérique particulièrement délicat se pose, en raison de la disparité des constantes de temps des deux phénomènes entre les bulles de différents rayons.

Il est également possible de s'intéresser à un régime permanent, pour lequel la population de bulles et l'amplitude de la pression acoustique sont supposées constantes en chaque point. Dans ces conditions, le terme instationnaire $\frac{\partial n}{\partial t}$ peut être supprimé dans l'équation (5.126). Cette alternative semble plus abordable techniquement, mais il est souhaitable de vérifier préalablement l'existence possible d'un régime permanent, résultant d'un équilibre entre les différents phénomènes modélisés précédemment. Ceci fait l'objet du prochain chapitre.

Notons pour finir que des études semblables à celle envisagée ici ont été effectuées par différents auteurs.

Kobelev and Ostrovskii (1983, 1989) proposent une équation de conservation semblable à la notre, sans les termes de diffusion rectifiée, ni ceux de fragmentation. Les auteurs en fournissent une résolution analytique élégante en ne considérant que des bulles de taille résonante. La solution obtenue fournit une bonne interprétation de l'effet d'auto-transparence d'un liquide à bulles à une onde acoustique, observé par Kobelev et al. (1979). Notons que les amplitudes de pression envisagées dans cette étude sont bien inférieures à celles de la cavitation acoustique.

Alekseev and Yushin (1986) écrivent une équation de conservation contenant tous les termes, mais fournissent peu de détail sur la modélisation de la fragmentation et utilisent comme nous l'avons mentionné une expression erronée pour la section de collision. Les auteurs ne proposent pas par ailleurs de résolution des équations.

5.7 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une modélisation de quatre phénomènes majeurs influant sur la structure d'un champ de bulles de cavitation : la diffusion rectifiée, les forces de Bjerknes, la coalescence, et la fragmentation.

Outre une bibliographie importante sur chacun de ces phénomènes, nous avons complété chaque fois que cela était nécessaire certaines imprécisions ou erreurs dans la littérature, notamment la justification du moyennage de l'équation de la dynamique appliquée à une bulle pour déterminer sa vitesse terminale, et la section de collision dans le cadre de la coalescence. Pour la fragmentation, nous avons suggéré plusieurs approches pour la détermination du seuil, ainsi que pour le nombre et la taille des bulles produites.

Ces résultats ont été regroupés dans une équation de conservation du nombre de bulles, qui traduit physiquement l'action de l'onde acoustique sur la population de bulles. La résolution couplée de cette équation avec une équation de propagation dans un liquide à bulles fournit en théorie la pression acoustique et la distribution de bulles en chaque point du milieu.

Les différents points délicats dans la résolution de ce problème ont été discutés. Il apparaît cependant que la recherche d'un régime permanent soit envisageable, en supprimant le terme instationnaire de l'équation de conservation. Une telle solution en régime permanent est très intéressante pratiquement puisqu'elle fournirait directement une carte des pressions et du champ de bulles dans le milieu.

Physiquement, un tel régime permanent doit résulter d'un équilibre entre les quatre phénomènes de diffusion rectifiée, migration des bulles, coalescence et fragmentation. Le chapitre suivant examine l'éventualité d'un tel équilibre, compatible avec la modélisation des phénomènes envisagée dans ce chapitre.

Chapitre 6

Recherche d'une population de bulles stationnaire.

6.1 Introduction

Nous avons suggéré au chapitre précédent que la résolution du système d'équations couplé régissant l'interaction de l'onde acoustique et de la population de bulles pouvait être envisagée dans un cadre stationnaire, où l'amplitude de la pression acoustique et la répartition du nombre de bulles restent constantes en chaque point.

L'objectif de ce chapitre est d'examiner qualitativement l'existence possible d'un équilibre entre les quatre phénomènes de diffusion rectifiée, migration des bulles, coalescence et fragmentation, conduisant à une telle configuration stable. Si la réponse à cette question est positive, la résolution du système d'équations proposé prend un sens, et pose au plus un problème technique. Dans le cas inverse, nous devrons déterminer quels sont les points faibles de notre modélisation qui conduisent à cette impossibilité.

L'on doit tout d'abord se poser la question fondamentale suivante : une telle configuration stable correspond-elle à une réalité expérimentale ? Bien qu'aucun résultat ne puisse, à notre connaissance, permettre de conclure clairement sur ce point, une configuration expérimentale est rencontrée fréquemment dans les expériences de cavitation à basse fréquence. Celle-ci, communément appelée «effet d'écran», décrit une activité de cavitation très forte localisée au voisinage de la source acoustique, provoquant l'extinction de l'onde à mesure que l'on s'en éloigne. Il est raisonnable de penser que ce régime

correspond à une population de bulles stable dans le temps, possédant une structure spatiale bien déterminée.

Du point de vue de l'expérimentateur, cet effet est gênant puisqu'il réduit la portée de l'action de l'onde acoustique à une certaine épaisseur de fluide au voisinage de la source. Une estimation de cette épaisseur serait bien sûr une information très intéressante, et a en fait motivé ce chapitre et le précédent.

Nous prendrons donc cette configuration comme point de départ de notre raisonnement, et chercherons à déterminer comment elle peut se maintenir en équilibre, à la lumière des résultats du chapitre précédent. Nous examinerons également comment pourrait s'effectuer la transition vers ce régime, ainsi que son occurrence pour des hautes fréquences.

6.2 Comparaison des différents seuils.

Le devenir d'une bulle dans un champ acoustique donné est souvent examiné en traçant les seuils de diffusion rectifiée et de cavitation instable dans le plan (R_0, P). Par exemple, le schéma proposé par Neppiras (1980) pour une fréquence de 20 kHz est représenté figure 6.1. Le seuil de diffusion rectifiée est tracé d'après l'expression de Safar, et le seuil de cavitation instable est le seuil de Blake.

Une bulle placée sous le seuil de diffusion rectifiée se dissout théoriquement dans le liquide au bout d'un temps fini. Une bulle située entre les deux seuils augmente son rayon par diffusion rectifiée. Si ce faisant, elle coupe le seuil de cavitation instable, elle se fragmente (flèche «A» sur la figure) ; certaines bulles issues de la fragmentation tombent dans la zone au-delà du seuil de diffusion rectifiée, et croissent à nouveau, alors que les autres se dissolvent. Neppiras appelle ce scénario «cycle de cavitation gazeuse» ou «cycle de diffusion-cavitation», et note que l'activité transitoire se produit juste sur le seuil de cavitation instable (en l'occurrence le seuil de Blake).

Une autre éventualité pour une bulle située entre les deux seuils est qu'elle croisse sans rencontrer le seuil de cavitation transitoire (flèche «B» sur la figure), et devienne suffisamment grosse pour remonter à la surface par gravité. Neppiras dénomme ce phénomène «cycle de dégazage».

Notons que Neppiras (1980) utilise l'expression de Safar pour le seuil de diffusion rectifiée, qui conduit à une valeur finie lorsque $R_0 \to 0$. L'expression plus complète de Crum and Hansen (1982) conduit, comme nous l'avons noté

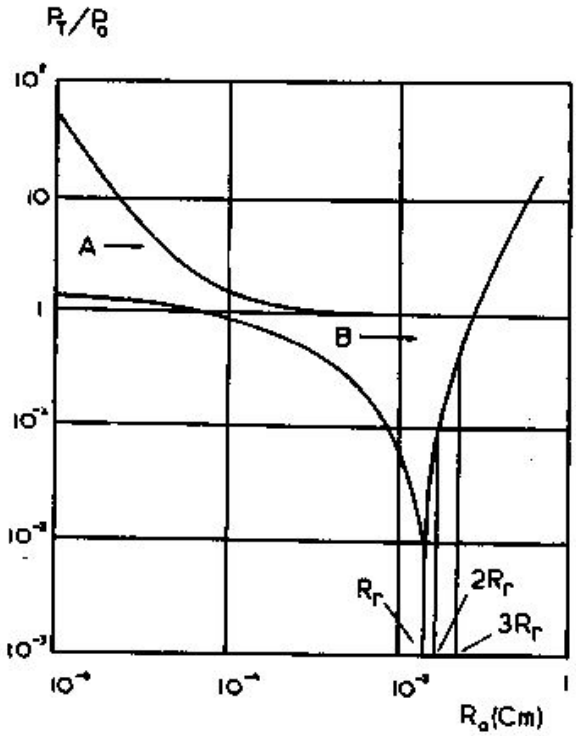


FIGURE 6.1 – D'après Neppiras (1980) : superposition des seuils de diffusion rectifiée et de Blake à 20 kHz.

précédemment à une valeur infinie du seuil pour des bulles de rayon très faible. Afin de réexaminer le raisonnement de Neppiras, nous avons superposé figure 6.2 le seuil de diffusion rectifiée de Crum and Hansen (1982), le seuil de Blake, et le seuil d'apparition d'instabilités de surface calculés au chapitre précédent.

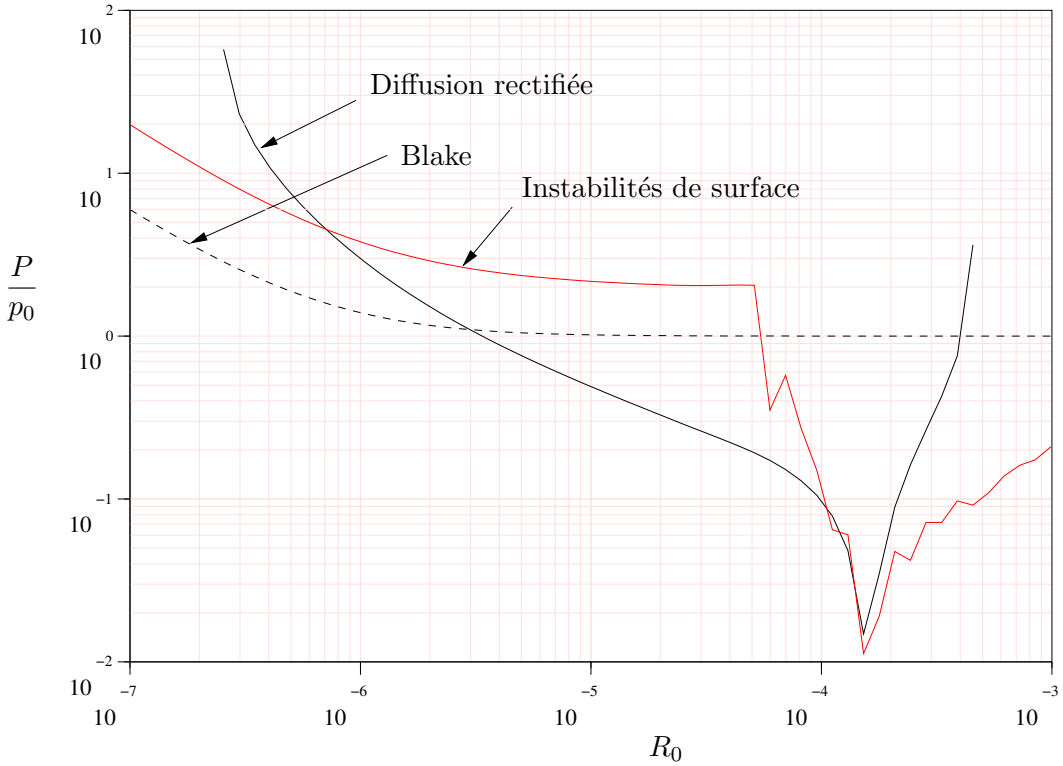


FIGURE 6.2 – Superposition des seuils de diffusion rectifiée, de Blake et d'apparition d'instabilités de surface.

Il apparaît tout d'abord que des bulles de taille inférieure à 0.22 μm ne pourront jamais grossir par diffusion rectifiée. Ensuite, pour des bulles de taille inférieure à 3 μm, le seuil de diffusion rectifiée est supérieur au seuil de Blake, ce qui signifie que si des bulles de cette taille se fragmentent, les résidus de fragmentation se dissolvent obligatoirement dans le liquide, au lieu de renucléer la zone de cavitation.

Il est également clair sur notre figure que le domaine dans le plan (R_0, P) pour lequel les bulles peuvent grossir par diffusion rectifiée jusqu'au seuil de cavitation transitoire est extrêmement restreint, ce qui indiquerait que ce phénomène, pourtant classiquement mentionné dans la littérature, est somme toute anecdotique. Cette constatation doit quand même être nuancée, car l'importance du phénomène dépend du critère adopté pour la cavitation transitoire ;

si on choisissait par exemple $R_{\max}/R_0 > 2$, le seuil obtenu deviendrait inférieur au seuil de Blake à mesure que la fréquence augmente, et la conclusion serait légèrement différente.

Laissons de coté cet ensemble de remarques pour l'instant, et remarquons que la démarche ci-dessus ne prend en compte que les phénomènes de diffusion rectifiée et de fragmentation, et ne reflète ni la structure spatiale du champ acoustique, ni celle de la population de bulles. Par exemple la migration des bulles sous l'influence des forces de Bjerknes est ignorée par cette approche.

Nous nous proposons d'appréhender cet aspect supplémentaire, par une extension de la méthode graphique précédente, pour étudier l'effet d'écran.

6.3 Effet d'écran

6.3.1 Hypothèses

On considère une source acoustique placée en $x = 0$, oscillant à la fréquence f, imposant une pression acoustique d'amplitude P_m. Pour se placer dans des conditions de cavitation dite «forte», produisant l'effet d'écran, cette dernière sera prise de l'ordre de plusieurs fois la pression hydrostatique p_0.

La géométrie du système est supposée monodimensionnelle, de telle sorte que la pression acoustique reste uniforme dans un plan perpendiculaire à x. Nous effectuons la même hypothèse pour la population de bulles.

Nous formulons à priori l'hypothèse que l'effet d'écran provoque une décroissance du profil de pression acoustique $P(x)$ dans une zone d'une certaine épaisseur au voisinage de la source. Cela se justifie qualitativement par le fait que dans cette zone, le nombre de bulles est si élevé que la partie imaginaire du nombre d'onde k est du même ordre de grandeur que sa partie réelle. Cette fonction $P(x)$ sera considérée comme une donnée de notre problème, mais nous différons sa définition précise.

Nous tentons maintenant de déterminer si ce profil de pression décroissant et la population de bulles peuvent se maintenir de façon permanente.

6.3.2 Zones de cavitation

6.3.2.1 Définition

Avec cette forme supposée décroissante du profil de pression, la figure 6.2 peut être relue avec x croissant du haut vers le bas. Nous en déduisons que le milieu peut être décomposé approximativement en trois régions (figure 6.3), de haut en bas sur la figure 6.2

- celle allant de la source jusqu'à l'abscisse x_f où $P \simeq 1$ atm. Nous dénommerons cette région «zone de cavitation forte».
- celle allant de x_c à au point d'abscisse x_s où $P \simeq 10^{-2}$ atm, cette dernière valeur correspondant au minimum du seuil de diffusion rectifiée. Nous appellerons cette région «zone de cavitation stable»
- Celle située en-deçà du minimum du seuil de diffusion rectifiée, $P = 10^{-2}$ atm. Dans cette zone, aucune bulle ne peut subsister, et il n'y a pas de cavitation.

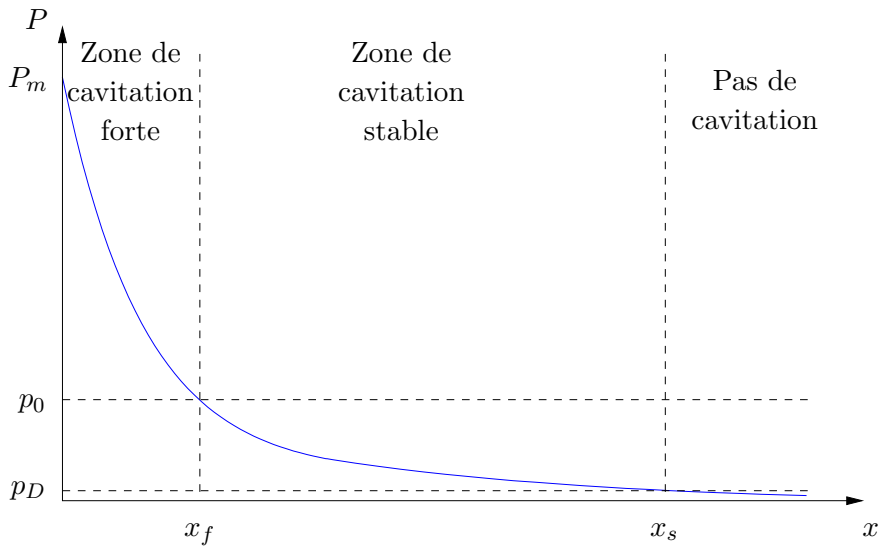


FIGURE 6.3 – Décomposition du milieu en trois régions : la zone de cavitation forte s'étend de la source au point x_f où la pression acoustique est égale à p_0 ; la zone de cavitation stable s'étend de x_f au point x_s correspondant au minimum du seuil de diffusion rectifiée ; enfin la dernière zone, au-delà de x_s est une région sans bulles.

Nous allons maintenant examiner le comportement des bulles dans les deux premières zones.

6.3.2.2 Zone de cavitation forte

La figure 6.4 montre les seuils de Blake et de diffusion rectifiée dans cette zone. Ces derniers se coupent en un point d'ordonnée P_c/p_0 très proche de 1, correspondant à une abscisse que nous notons x_c.

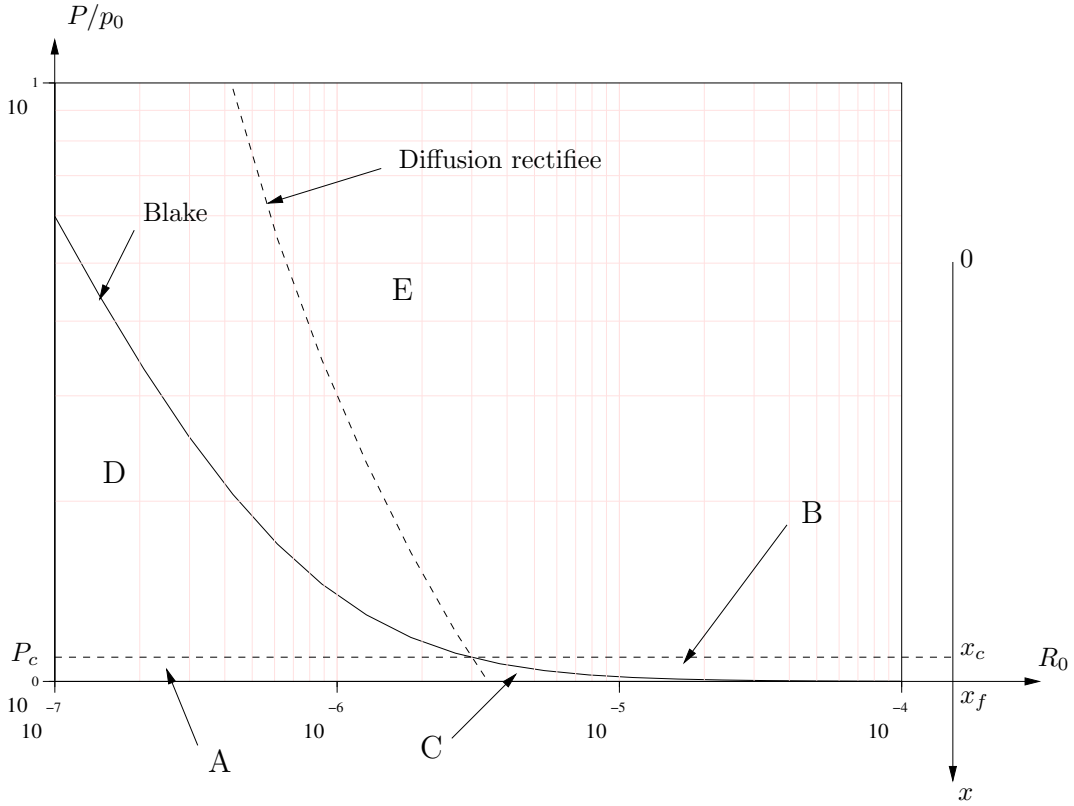


FIGURE 6.4 – Zone de cavitation forte, comprise entre la source et le point où la pression acoustique vaut 1 atm. Les seuils de Blake se coupent en un point de pression P_c très proche de 1 atm.

Dans la zone comprise entre x_c et x_f, c'est-à-dire dans une épaisseur très fine du bas de la figure 6.4, trois zones peuvent être considérées. Les bulles inférieures au seuil de diffusion rectifiée se dissolvent (A), celles supérieures au seuil de Blake se fragmentent (B), et celles comprises entre les deux seuils croissent par diffusion rectifiée (C). Ce faisant ces dernières sont susceptibles d'atteindre le seuil de Blake, et de se fragmenter. Il s'agit là du phénomène de diffusion-cavitation mentionné par Neppiras.

Pour toutes les abscisses comprises entre la source et x_c (pressions supérieures à P_c), ce qui représente la majeure partie de la zone de cavitation forte, le

seuil de diffusion rectifiée est au-dessus du seuil de Blake, ce qui signifie qu'en un point x donné, les bulles supérieures au seuil de Blake (E) se fragmentent, et les autres (D) se dissolvent. Le processus peut être schématisé par la figure 6.5.

Ceci conduit au paradoxe suivant : si aucun autre mécanisme ne vient compenser les processus de fragmentation-dissolution, toutes les bulles de cette zone finiraient par disparaître !

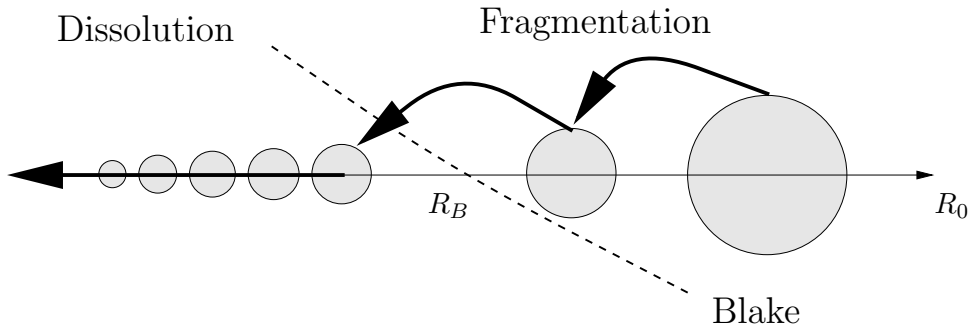


FIGURE 6.5 – Evolution des bulles dans la zone $x < x_c$ de la figure 6.4. Les bulles dans la zone E se fragmentent, engendrant des bulles dans la zone D qui se dissolvent.

Nous reviendrons ultérieurement sur les interprétations possibles de ce paradoxe.

6.3.2.3 Zone de cavitation stable

Les deux seuils qui interviennent dans cette zone (figure 6.6) : sont le seuil de diffusion rectifiée et le seuil de fragmentation stable.

Dans la région notée F, les bulles se dissolvent, et dans la région notée G, les bulles croissent par diffusion rectifiée, jusqu'à ce qu'elles atteignent le seuil de fragmentation stable.

Comme nous l'avons vu, ce dernier est difficile à définir précisément, et la courbe représentée ici est la reproduction de la figure (5.16), obtenue en combinant les différents seuils d'accrochage sous-harmoniques des différents modes d'oscillation surfacique. Nous avions mentionné le fait que pour des bulles bien inférieures à la taille de résonance, ces oscillations surfaciques ne conduisent pas nécessairement à la fragmentation des bulles. La courbe représentée est donc vraisemblablement «trop basse» par rapport au vrai seuil de fragmentation stable.

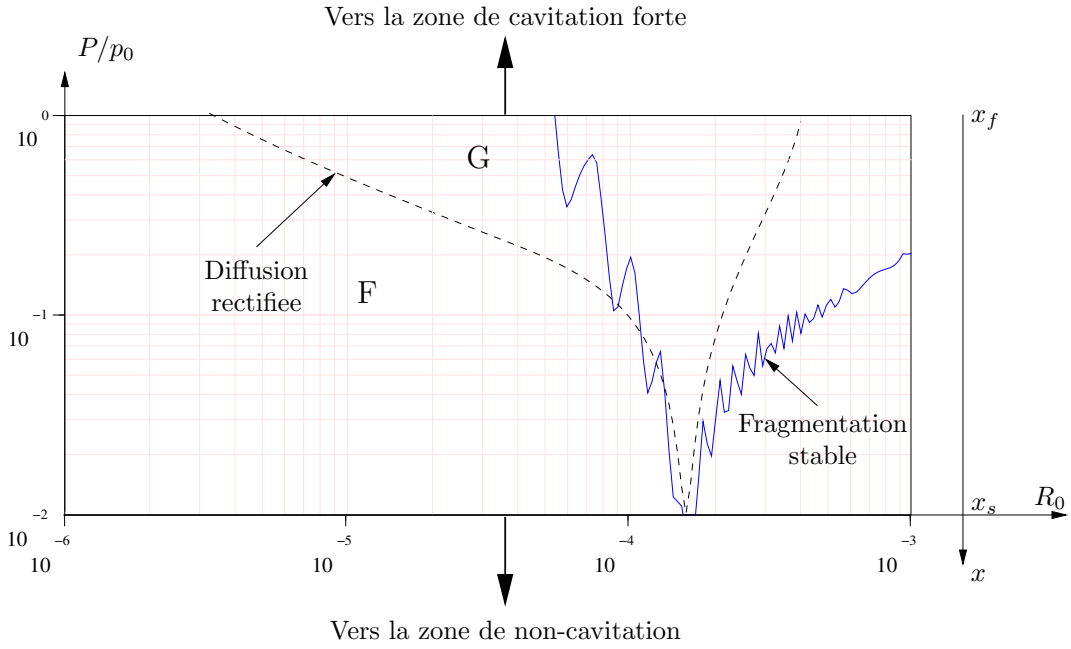


FIGURE 6.6 – Zone de cavitation stable.

Quoi qu'il en soit, il est vraisemblable que la plupart les bulles de la région B qui croissent par diffusion rectifiée seront ultimement arrêtées par le seuil de fragmentation stable. On peut donc s'attendre à ce que, à moins qu'il y ait coalescence, aucune bulle ne parvienne au delà de la taille de résonance.

Venons-en maintenant à un point important : toutes les bulles des régions A et B oscillent de manière stable, soit en se dissolvant, soit en croissant. Comme elles sont toutes inférieures à la taille de résonance, elles doivent toutes se diriger dans le sens des pressions croissantes, c'est-à-dire vers le haut de la figure 6.6, pour parvenir finalement dans la zone de cavitation forte.

Il apparaît donc un second paradoxe : comment des bulles peuvent-elles subsister en régime permanent dans la zone de cavitation stable, puisqu'elles sont toutes attirées vers la zone de cavitation forte ?

Cette question étant liée à la migration des bulles sous l'influence des forces de Bjerknes, il convient de compléter les graphiques précédents avec une représentation de ce phénomène. C'est l'objet de la prochaine section.

6.3.3 Migration d'une bulle entre les zones

Nous cherchons à visualiser simultanément la croissance/dissolution d'une bulle et sa migration vers la source. En d'autres termes, cela revient à déterminer son trajet dans le plan (R_0, P).

Pour avoir des informations quantitatives sur ce trajet, il faut connaître la vitesse d'une bulle en un point du plan (R_0, P) donné. Les données de R_0 et P ne suffisent pas, puisque la vitesse de migration d'une bulle sous l'influence des forces de Bjerknes dépend aussi du gradient de pression acoustique local (voir expressions (5.29) et (5.40) du chapitre précédent).

Ce dernier ne peut être calculé effectivement que si nous définissons explicitement la fonction $P(x)$. Nous considérons dans un premier temps que cette fonction est exponentielle décroissante, soit

$$P = P_m \exp(-k_i x) \tag{6.1}$$

P_m étant l'amplitude de la pression imposée par la source.

Imaginons maintenant une représentation graphique qui permette de visualiser le trajet des bulles dans le champ acoustique $P(x)$, simultanément avec l'évolution de leur rayon.

Puisque $P(x)$ est une fonction monotone de x prescrite, le plan (R_0, P) de la figure 6.2 peut être interprété comme le plan (R_0, x) : lorsqu'une bulle se déplace vers la source, dans le sens des x décroissant, elle traverse des zones de pression acoustique croissante.

Pour R_0 et P fixés, on peut calculer d'une part le taux de croissance ou décroissance $dR_0/dt = w(R_0, P)$ (expression (5.12)). Ceci fournit la «vitesse» horizontale dans le plan (R_0, P). La «vitesse verticale» dP/dt correspond aux variations de pression rencontrées par la bulle dans son déplacement vers la source, et s'écrit :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dP}{dx} = q(R_0, P) \tag{6.2}$$

v étant la vitesse d'une bulle sous l'influence de la force de Bjerknes. Le trajet des bulles dans le plan (R_0, P) peut donc être matérialisé par le champ de vecteurs $(w(R_0, P), q(R_0, P))$.

La figure 6.7 montre le résultat obtenu, superposé au seuil de diffusion rectifiée et au seuil de Blake. Les valeurs numériques définissant le profil de pression sont les suivantes : $k_i = 40$ m^{-1}, $P_m = 5p_0$. Avec ces valeurs, la

pression acoustique est égale à p_0 à l'abscisse $x = 4$ cm. Cette distance correspondrait environ à l'épaisseur de la zone de cavitation. Les valeurs sont bien sûr choisies arbitrairement, mais notons que la valeur de k_i choisie correspondrait d'après la relation de dispersion à un taux de gaz de 10^{-2}, s'il n'y avait que des bulles de 10 μm.

Notons également que la vitesse d'une bulle ainsi que son taux de croissance sont définies seulement pour des bulles stables, et à ce titre, les flèches placées au-dessus du seuil de Blake n'ont pas de sens.

L'évolution d'une bulle peut être déterminée en suivant les flèches sur ce schéma. Pour avoir une idée plus précise de cette évolution, nous avons résolu numériquement l'équation

$$\frac{dP}{dR_0} = \frac{q(R_0, P)}{w(R_0, P)} \tag{6.3}$$

qui détermine les trajectoires dans le plan (R_0, P). Considérons par exemple une bulle de 10 μm placée initialement à l'abscisse $x = 7.4$ cm (point A sur la figure 6.7), où la pression acoustique vaut environ 0.25 atm : elle amorce tout d'abord sa dissolution tout en avançant vers la source ; ce faisant, elle croise le seuil de diffusion rectifiée (point B) et grossit, jusqu'à ce qu'elle arrive au seuil de Blake (point F_1) ; en ce point, elle se fragmente et nous avons supposé arbitrairement qu'elle donnait naissance à deux bulles identiques. Les résidus de fragmentation vont à nouveau augmenter par diffusion rectifiée, tout en continuant à se diriger vers la source, puis à nouveau rencontrer le seuil de Blake (point F_2 sur figure 6.8). Le processus fragmentation + croissance se produit ainsi 6 fois (points $F_1 \ldots F_6$ sur la figure 6.8), et à l'issue de la dernière fragmentation, les bulles, étant en dessous du seuil de diffusion se dissolvent dans le liquide.

Une bulle de 10 μm initialement placée en $x = 7.4$ cm fournit donc ultimement 64 bulles de 2.8 μm en $x = 3.7$ cm qui finissent par se dissoudre dans le liquide (sans quasiment plus bouger, en raison de leur faible taille).

Cet exemple n'a bien sûr qu'une valeur indicative dans la mesure où nous avons défini à priori le profil de pression. Il montre cependant que toutes les bulles inférieures à la taille de résonance qui ne se dissolvent pas subiront un chemin de ce type, en se fragmentant plusieurs fois sur le seuil de Blake, pour arriver finalement au point où celui-ci croise le seuil de diffusion rectifiée. En ce point, les résidus de fragmentation se dissolvent enfin. Notons que parmi toutes les bulles concernées par ce processus, certaines, comme dans l'exemple ci-dessus, devraient normalement se dissoudre, mais réussissent à «accrocher» le seuil de diffusion rectifiée au cours de leur migration.

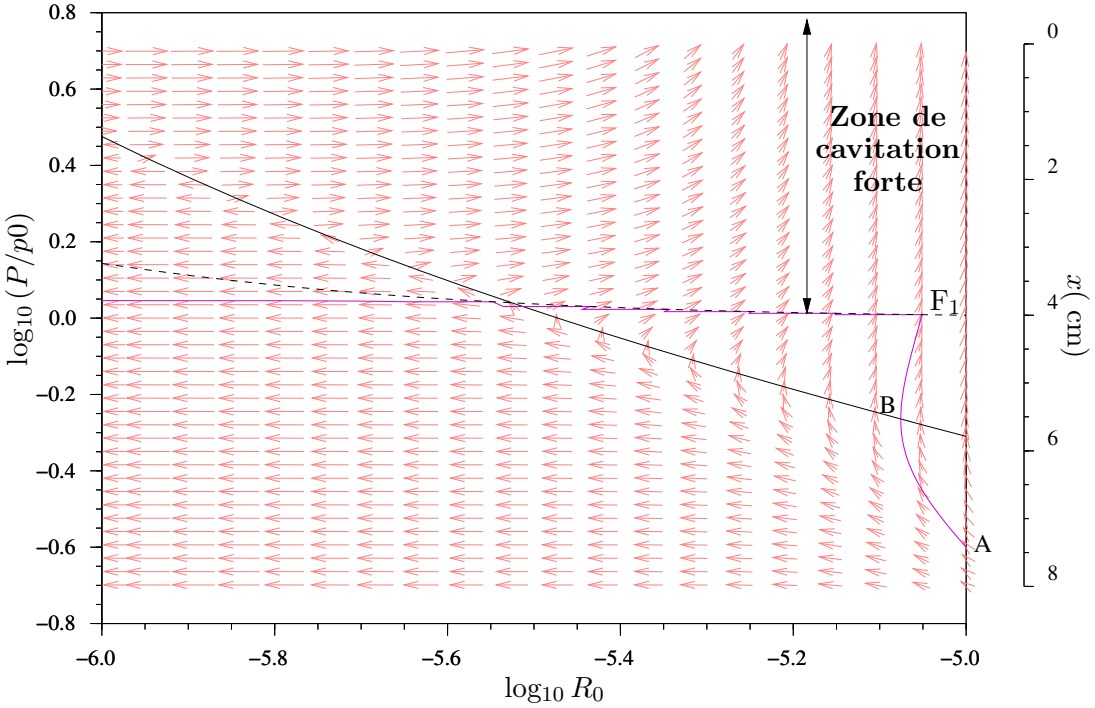


FIGURE 6.7 – Représentation du champ défini par $(dR_0/dt, dP/dt)$. En trait pointillé : seuil de Blake. En trait plein : seuil de diffusion rectifiée. En trait gris : trajectoire d'une bulle de rayon initial 10 μm partant de $x = 7.4$ cm.

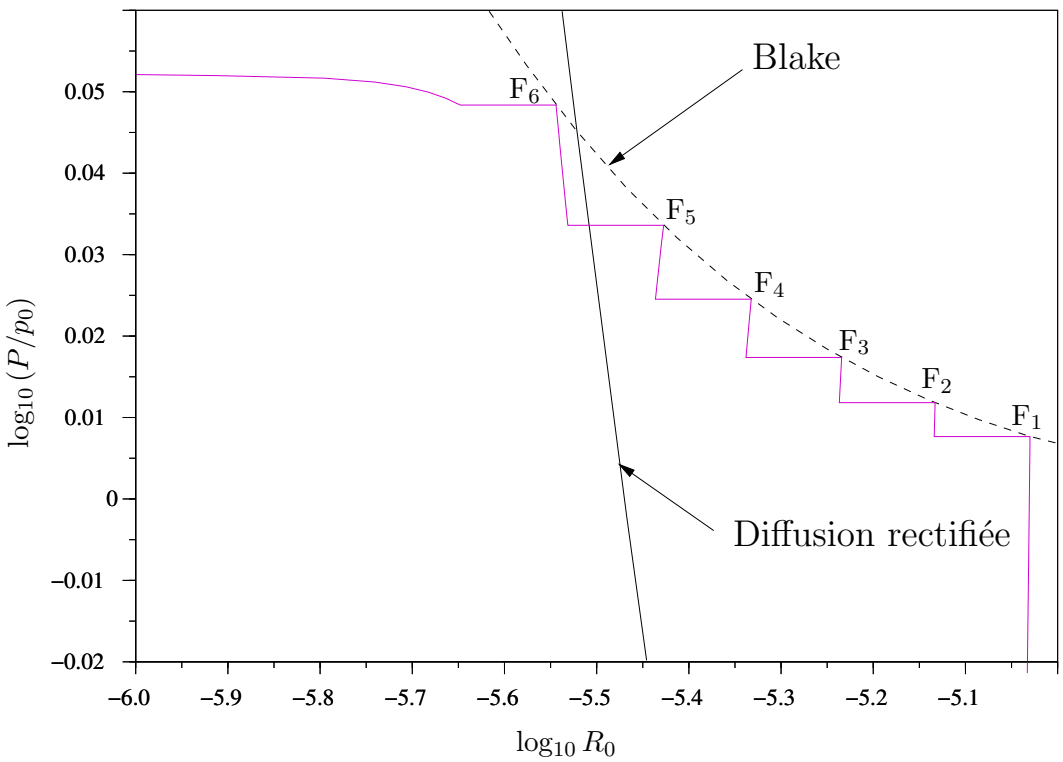


FIGURE 6.8 – Zoom sur la figure 6.7.

6.4 Plusieurs paradoxes- Discussion

6.4.1 Une migration à sens unique ?

Revenons tout d'abord sur le dernier paradoxe : la migration continuelle des bulles stables vers la zone de cavitation forte.

On peut considérer le problème sous la forme d'un bilan de gaz : ces bulles transportent une quantité de gaz en permanence depuis la zone de cavitation stable vers le début de la zone de cavitation forte, où ce gaz se dissout dans le liquide. Par conséquent, cette dernière devrait s'enrichir en gaz dissous, alors que la première devrait s'appauvrir.

Vu sous cet angle, le paradoxe peut être levé en considérant que ce gradient donne lieu à un transfert de gaz dissous dans la masse du liquide depuis la zone de cavitation forte vers la zone de cavitation stable, ce qui compenserait ainsi le transfert engendré par la migration des bulles (figure 6.9).

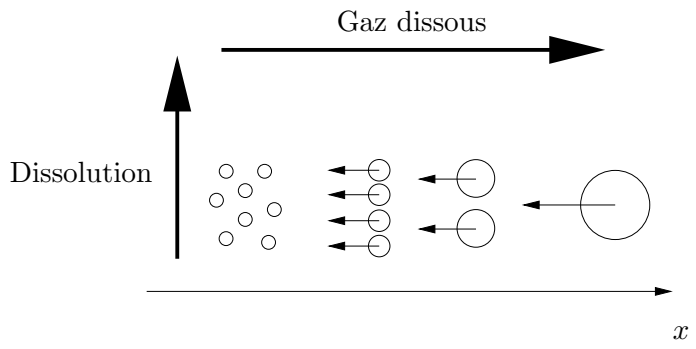


FIGURE 6.9 – Schéma de transfert de gaz dans le liquide : les bulles migrant sous l'influence des forces de Bjerknes transportent du gaz vers la source acoustique. Après plusieurs cycle de fragmentation-diffusion rectifiée, les micro-bulles produites se dissolvent dans le liquide. Le gradient de concentration en gaz dissout provoque un transfert depuis la source vers le lieu d'où viennent les bulles.

Cette solution est vraisemblable, au sens où elle satisfait un bilan de gaz, et permettrait d'expliquer pourquoi le phénomène de cavitation peut durer longtemps sans réapprovisionner le liquide en gaz dissous.

Accessoirement, cette remarque montre un fait important sur le plan de la modélisation : le bilan en terme de nombres de bulles, tel que nous l'avons

envisagé sous la forme (5.126) dans la section 5.6.1 est inapproprié. Un bilan en terme de nombre de moles de gaz serait plus juste, et nécessiterait de plus l'écriture d'une équation macroscopique de transfert de gaz, avec des termes source correspondant aux bulles qui se dissolvent, et des termes puits correspondants aux bulles qui grossissent par diffusion rectifiée [1].

Il reste malgré tout une contradiction : même si le bilan de gaz est satisfait par le «retour» de gaz dissous décrit ci-dessus, rien n'explique comment ce gaz se reconstitue sous la forme de bulles. Un deuxième processus devrait compléter le retour de ce gaz pour le renucléer. Nous proposons ci-dessous un mécanisme susceptible d'assurer cette fonction.

Imaginons que le profil de pression soit décroissant seulement dans la zone de cavitation forte, et qu'il présente ensuite un minimum (noeud de pression) suivi d'un maximum (ventre de pression) (figure 6.10). Cette configuration pourrait se justifier par le fait que dans la zone de cavitation stable, le nombre de bulles soit beaucoup moins élevé, et la partie réelle du nombre d'onde redevient supérieure à sa partie imaginaire, de telle sorte qu'une onde stationnaire puisse subsister dans cette zone.

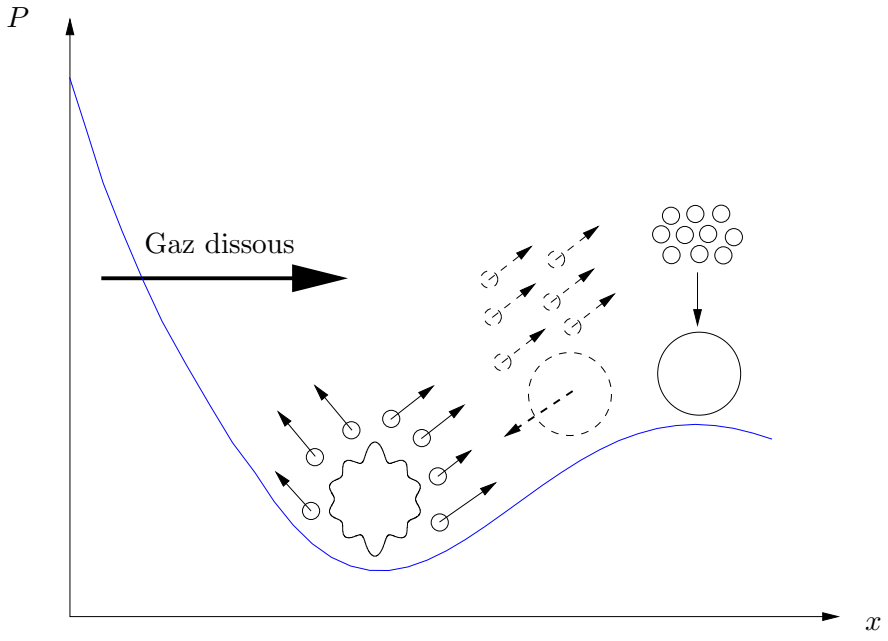


FIGURE 6.10 – Mécanisme possible de renucléation du gaz dissous.

1. Cette équation serait un peu l'analogue de l'équation de transfert thermique macroscopique 2.42, où la présence des bulles introduit localement un terme source de chaleur.

Les bulles de taille inférieure au rayon de résonance fuient le noeud de pression, et peuvent donc partir soit vers la source, soit vers le ventre. Comme ce dernier est un attracteur pour toutes ces petites bulles, ces dernières sont susceptibles d'y coalescer, et donner éventuellement naissance à une bulle de taille supérieure à la taille de résonance. Celle-ci serait donc à nouveau attirée vers le noeud.

Si l'on admet qu'elle puisse y parvenir intacte, elle peut alors s'y fragmenter et donner naissance à de petites bulles. Ces dernières peuvent alors grossir par diffusion rectifiée, et repartir à nouveau soit vers la source, soit vers le ventre.

Le processus peut fonctionner en régime permanent si l'on considère que du gaz dissous est toujours disponible au niveau du noeud, en raison du «retour de gaz» mentionné précédemment. La (ou les) grosse bulle et ses descendantes agiraient alors comme des agents de renucléation de ce gaz dissous.

Ce processus, bien que légèrement compliqué, est le seul que nous ayons trouvé pour expliquer l'existence d'un régime permanent. Sa vérification expérimentale pourrait être envisagée en traquant l'apparition de bulles supérieures à la résonance au voisinage immédiat de la zone de cavitation forte, et en vérifiant l'existence d'un profil de pression semblable à celui suggéré ci-dessus.

6.4.2 Fragmentation ou dissolution : une autre alternative ?

Nous revenons maintenant sur le premier paradoxe mentionné dans la section 6.3.2.2 : dans la majeure partie de la zone de cavitation forte, le seuil de diffusion rectifiée étant supérieur au seuil de Blake, les bulles doivent soient se fragmenter, soit se dissoudre, selon qu'elles sont au-dessus du seuil de Blake (zone E de la figure 6.4), ou au-dessous (zone D).

Si l'ensemble de cette zone était alimentée de manière continue en bulles par la zone de cavitation stable, le paradoxe serait levé : ces dernières se fragmentent, les résidus se dissolvent, et le gaz dissous retourne vers la zone stable.

Mais comme nous l'avons illustré par les figures 6.7 et 6.8, selon le modèle utilisé, les bulles issues de la zone de cavitation stable se fragmentent toutes au même endroit, au tout début de la zone de cavitation forte. La zone située plus en amont vers la source ne pourrait donc être alimentée par ce processus.

Pour lever ce paradoxe, deux solutions peuvent être envisagées :

- Dans la mesure où de nombreuses bulles se dissolvent, le liquide se sursature en gaz dissous, ce qui limite le processus.
- Certaines bulles pourraient être stables par rapport au phénomène de croissance/dissolution et/ou celui de fragmentation.

Ces deux hypothèses suggèrent donc un «retard à la dissolution». Ce dernier représente une condition suffisante pour que les bulles en dessous du seuil de Blake puissent osciller suffisamment pour migrer vers la source ou pour coalescer, ce qui maintiendrait alors une population conséquente. Qualitativement, le système pourrait donc fonctionner en régime permanent.

Le retard à la dissolution lié à la sursaturation du liquide en gaz dissous est une hypothèse plausible. Notons que celle-ci nous indique une fois de plus qu'une modélisation correcte de l'ensemble du phénomène nécessiterait l'écriture d'un bilan sur la quantité de gaz plutôt que sur le nombre de bulles.

Examinons maintenant l'existence de bulles microniques stables par rapport au processus de croissance/dissolution. Il s'agit là bien sûr d'une remise en cause du modèle simple de diffusion rectifiée que nous avons choisi, qui prédit effectivement l'existence d'un tel rayon, mais supérieur au rayon de résonance (voir section 5.2.6) donc bien supérieur à ceux qui nous intéressent ici.

En fait, il est possible de mettre en évidence plusieurs autres tailles de bulles stables par rapport à la croissance ou la dissolution, en relaxant l'hypothèse d'oscillations linéaires de la bulle. Church (1988) indique cette possibilité pour des fréquences de l'ordre du MHz, en calculant le seuil de diffusion rectifiée par la formule (5.16) de Crum and Hansen (1982) à partir des solutions numériques de l'équation de Gilmore. Les auteurs montrent que la courbe définissant le seuil n'est plus strictement décroissante pour des bulles inférieures à la taille de résonance, mais comporte un certain nombre de minima locaux, liés aux résonances non-linéaires des oscillations de la bulle.

La figure 6.11 montre que cette caractéristique implique l'existence de rayons de bulles stables. En effet considérons une pression P comprise entre P_1 et P_2 : cette pression coupe le seuil de diffusion rectifiée en trois points I_1, S et I_2 correspondant à des taux de croissance nuls. Pour les points I_1 et I_2, on voit qu'une légère augmentation du rayon mène au-delà du seuil de diffusion rectifiée ce qui conduit à une croissance de la bulle. Ces points sont donc instables. En revanche pour le point S, une augmentation du rayon conduit sous le seuil de diffusion rectifiée, et la bulle doit donc se dissoudre jusqu'au seuil : le point S est stable. On voit donc que toute bulle dans l'intervalle

$[R_1, R_2]$ peut être stable pour une certaine pression acoustique comprise entre P_1 et P_2.

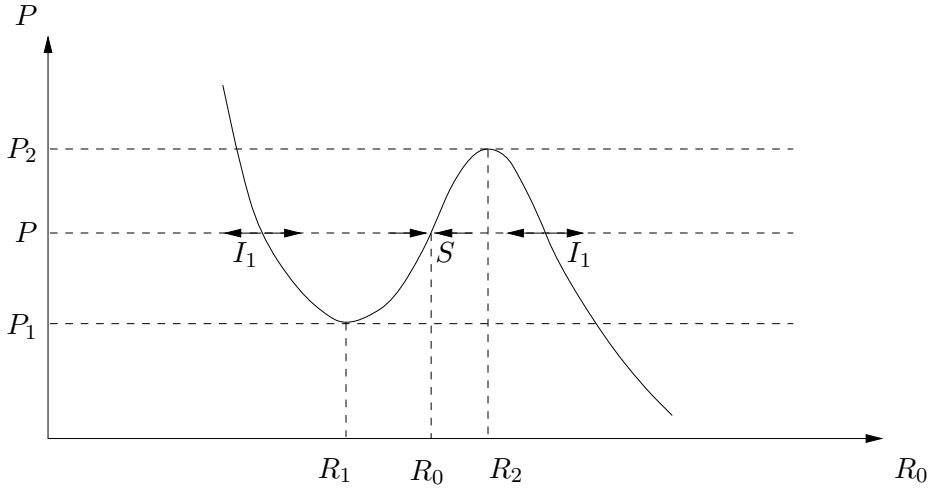


FIGURE 6.11 – Exemple de seuil de diffusion rectifiée exhibant un minimum local : une pression acoustique P comprise entre P_1 et P_2 coupe ce seuil en trois points I_1, S et I_2. Le point S correspond à une taille de bulle stable à la pression P.

Ce problème a connu un regain d'intérêt dans les dernières années, dans le cadre des expériences de sonoluminescence effectuées en maintenant une bulle unique en lévitation Gaitan et al. (1992). La bulle observée est maintenue dans un champ de fréquence de l'ordre de 20 kHz, et conserve un rayon environ égal à 10 μm. Cette observation est en contradiction avec les seuils de diffusion rectifiée que nous avons tracé puisqu'une telle bulle devrait soit grossir soit se dissoudre, mais en aucun cas rester stable.

Akhatov et al. (1997) ont récemment proposé une interprétation théorique de cette stabilité. En utilisant l'expression du seuil de Fyrillas and Szeri (1994) appliqué aux oscillations de bulles obtenues numériquement par l'équation de Keller, ils montrent que des petites bulles excitées légèrement au-dessus du seuil de Blake peuvent rester stables par rapport à la dissolution ou la croissance, du fait que la courbe de seuil de diffusion rectifiée admet un minimum local. La figure 6.12 extraite de leurs travaux montre l'allure du seuil obtenu.

On peut bien sûr objecter que de telles bulles devraient se fragmenter, au vu des amplitudes de pressions. Comme l'ont montré initialement Gaitan et al. (1992) dans leur expérience de lévitation, il n'en est rien, et il appert que des bulles de rayon de l'ordre de 10 μm restent stables dans une fourchette de

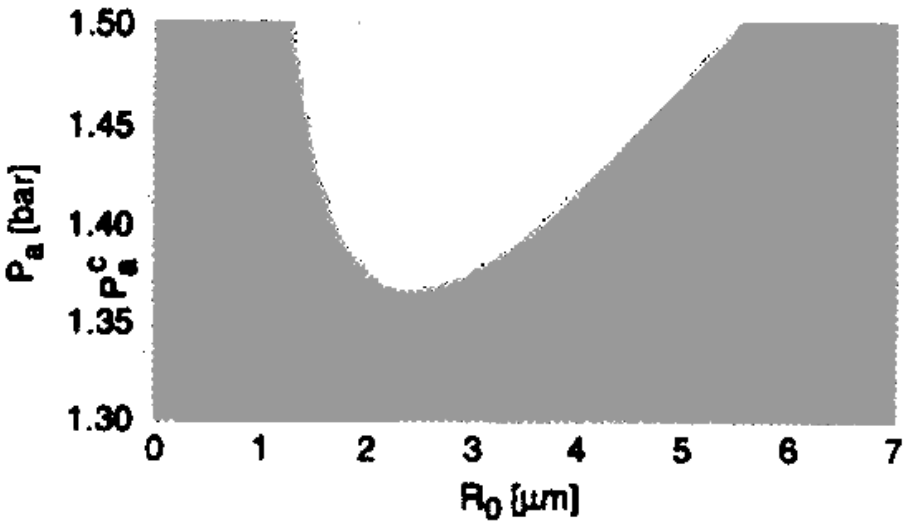


FIGURE 6.12 – D'après Akhatov et al. (1997) : seuil de diffusion rectifiée calculé numériquement à une fréquence de 20 kHz. Dans la zone grisée, les bulles grossissent, et dans la zone blanche elles se dissolvent. Le seuil présente un minimum local, de telle sorte que toutes les bulles sur la branche de droite sont stables par rapport au phénomène de dissolution/croissance.

pression acoustique allant de 1.1 à 1.5 atm. Les raisons de cette stabilité sont inconnues, et de telles bulles subissant une implosion assez violente, elles devraient selon les prédictions de Plesset and Mitchell (1956); Prosperetti (1977a) se fragmenter.

Nous pensons que l'existence de ces bulles stables par rapport au processus de croissance/dissolution joue certainement un rôle très important dans les champs de cavitation forte. Cette nouvelle donnée modifierait notablement la figure 6.7 et l'interprétation que l'on peut en faire, et plus généralement l'équation de conservation (5.126).

La même remarque s'applique à l'existence de bulles qui ne se fragmentent pas au-delà du seuil de Blake. Si une telle bulle a pu être observée dans le cadre d'expériences de lévitation, rien ne prouve qu'elles existent dans un champ de cavitation. Mais si c'est le cas, la forte non-linéarité de leurs oscillations devraient leur conférer des propriétés particulières, dont l'une est d'être stable par rapport à la dissolution.

6.4.3 Synthèse

Nous basant au départ sur l'hypothèse d'un profil de pression décroissant au voisinage de la source, nous avons montré que la prise en compte telle quelle du modèle du chapitre précédent conduisait à un certain nombre de contradictions quant à l'existence d'une population de bulles stationnaires.

Cette constatation guide l'amélioration du modèle dans deux directions distinctes :

1. la prise en compte du gaz dissous : en écrivant notre équation de conservation, nous avons considéré des variations de la quantité de gaz dans les bulles, sans examiner les variations correspondantes de la quantité de gaz dissous dans la masse du liquide.
2. l'abandon de l'hypothèse linéaire pour le calcul du seuil et du taux de croissance par diffusion rectifiée, ainsi que pour les seuils de fragmentation, ce qui nécessite le recours à la simulation numérique d'une équation de dynamique de bulle en chaque point du plan (R_0, P). Cette approche, comme le montrent différents auteurs permet de mettre en évidence des bulles stables par rapport à la dissolution/croissance, et conduirait à des seuils de fragmentation plus réalistes.

La première modification est délicate car elle transforme une équation de bilan de nombre de bulles en une équation de conservation de masse de gaz, faisant intervenir également la phase liquide. La seconde est facilement envisageable et devrait être effectuée en premier lieu, afin de reprendre la discussion effectuée ci-dessus avec des seuils plus réalistes.

6.5 Transition vers l'effet d'écran

6.5.1 Interprétation qualitative

Il est souvent mentionné que l'effet apparaît à partir d'un certain seuil de puissance acoustique fournie au système. Pour expliquer qualitativement cette caractéristique, partons d'une configuration où une source acoustique d'amplitude modérée alimente le milieu. Tant que la pression est en tous points inférieure au seuil de Blake, des bulles sont éventuellement présentes en certains points du milieu, à cause de la diffusion rectifiée, mais en taux assez faible. L'amortissement de l'onde est donc restreint et la présence d'un réflecteur implique l'établissement d'une onde stationnaire. Dans cette configuration,

les bulles inférieures à la taille de résonance sont attirées vers les ventres, où elles coalescent éventuellement, donnant naissance à des bulles supérieures à la taille de résonance s'échappant vers les noeuds ou remontant à la surface sous l'influence de la poussée d'Archimède. Ce domaine d'amplitudes correspondrait à un régime de dégazage

Si nous augmentons la puissance fournie au milieu, la pression au niveau des ventres de l'onde stationnaire finit par passer au dessus du seuil de Blake. Certaines bulles présentes en ces points se fragmentent. On peut prédire également que, la diffusion rectifiée concernant alors plus de bulles, le taux global de gaz augmente au niveau des ventres.

Il faut alors admettre que cette accumulation de bulles au niveau des ventres provoque la transition d'un profil de pression composés de noeuds et de ventres vers un profil strictement monotone au voisinage de la source.

Une fois cette transition effectuée, la source devient un attracteur de bulles, et à son voisinage la partie imaginaire du nombre d'onde augmente considérablement, et y renforce la décroissance du profil de pression.

L'inconnue du problème reste la transition précédente. Pour examiner la vraisemblance de ce phénomène rappelons (section 5.6.2) que l'équation de propagation monodimensionnelle se présente sous la forme d'une équation de Helmholtz dont le nombre d'onde est variable dans l'espace :

$$\frac{dP}{dx} + k^2(x)P = 0 \tag{6.4}$$

ce nombre d'onde k étant relié à la distribution locale de bulles par

$$k^2(x) = \frac{\omega^2}{c_l^2} + 4\pi\omega^2 \int_0^\infty \frac{R_0}{\omega_0^2(R_0) - \omega^2 - 2ib(R_0)\omega} N(x, R_0)\, dR_0 \tag{6.5}$$

Prenons le cas d'étude adimensionnel suivant : on suppose que le milieu est limité en $x = 1$ par un réflecteur rigide imposant $dP/dx = 0$, et excité par une source d'amplitude $P = 1$ en $x = 0$.

Le nombre d'onde comporte une partie uniforme k_0 réelle correspondant au nombre d'onde dans l'eau pure. L'onde stationnaire obtenue s'il n'y avait pas de bulles est donc la solution de $dP/dx + k_0^2 P = 0$ avec ces conditions aux limites (figure 6.13.a, courbe en traits pointillés).

Examinons maintenant comment rendre compte de l'effet de bulles accumulées aux ventres. La forme de la relation de dispersion (6.5) suggère d'écrire le carré du nombre d'onde sous la forme

$$k^2(x) = k_0^2 \left[1 + (A + iB) f(x)\right] \tag{6.6}$$

En effet, si les bulles s'accumulent aux ventres, la distribution $N(x)$ forme un pic au voisinage de ces derniers, et l'intégrale consiste donc en une fonction complexe dont les parties réelles et imaginaires sont nulles partout sauf au voisinage des ventres. La fonction $f(x)$ doit refléter ces pics et nous pouvons choisir par exemple

$$f(x) = \sum_i \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - x_i}{d} \right) \tag{6.7}$$

où les x_i sont les abscisses des ventres, et d règle la largeur des pics.

Nous avons calculé numériquement la solution de (6.4) pour différentes valeurs de A, B et d. La figure 6.13.a (courbe en traits pleins) montre par exemple la solution obtenue pour $A = 1$, $B = 2$ et $d = \lambda_0/30$. La fonction $f(x)$ est indiquée figure 6.13.b.

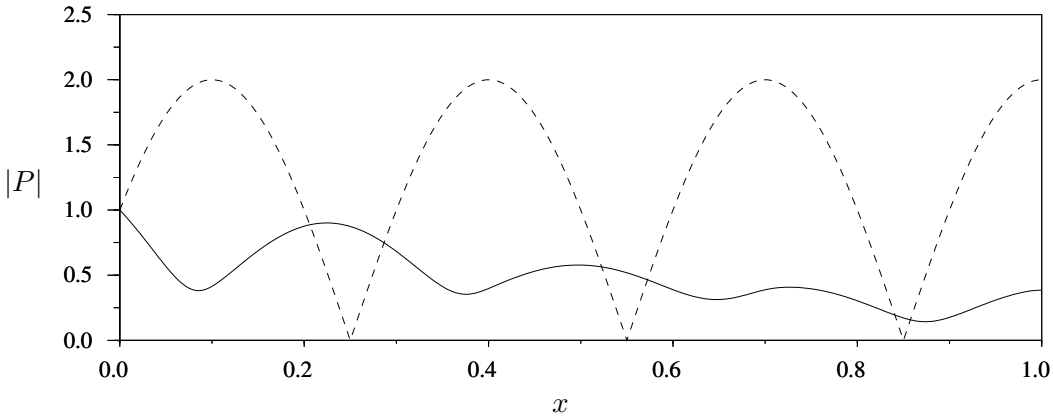
On voit que le profil est décroissant au voisinage de la source, ce qui signifie que la transition entre un profil d'ondes stationnaires et ce type de profil par accumulation de bulles aux ventres est cohérente avec l'équation de propagation (6.4).

Notons que la partie imaginaire B, responsable de l'amortissement spatial du profil est d'autant plus importante que la distribution de bulles est resserrée au voisinage de la taille de résonance. Comme les bulles coalescent aux ventres, cette hypothèse est plausible.

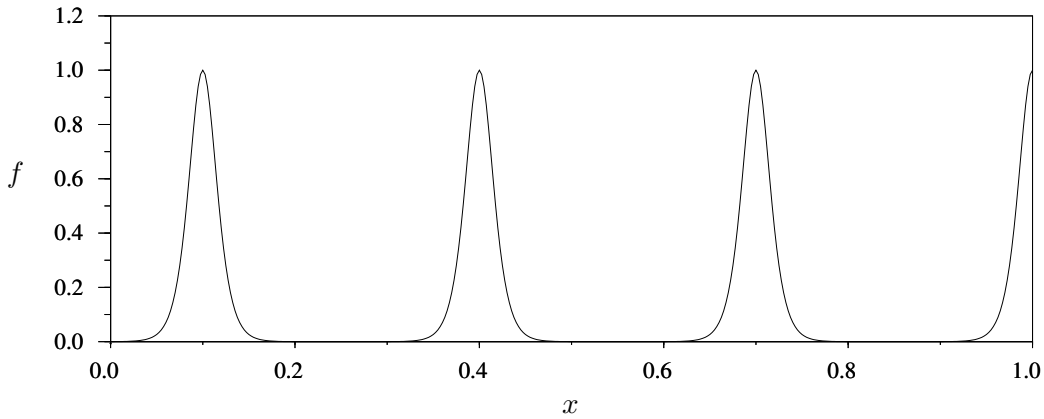
Toutefois, pour nuancer cette conclusion, notons que les valeurs de A et B utilisées ne correspondent pas à une distribution de tailles de bulles N qui soit physique. Nous avons en effet tenté d'obtenir des valeurs de cette ordre d'après la relation de dispersion (6.5) en imposant différentes distributions arbitraires de bulles sous la taille de résonance, sans succès. La coalescence impliquerait peut-être aussi des bulles supérieures à la taille de résonance se dirigeant vers les noeuds, ce qui entraînerait un amortissement plus grand.

De toutes façons, pour simuler rigoureusement cette transition, il faudrait faire évoluer la population de bulles en même temps que l'évolution du profil. Mathématiquement, cette évolution correspond au couplage entre l'équation de conservation du nombre de bulles (5.126) et l'équation de propagation.

Nous nous satisferons donc de la conclusion qualitative selon laquelle la transition vers l'effet d'écran peut être déclenchée par une accumulation de bulles au niveau des ventres.



a. En traits pointillés : solution de l'équation (6.4) pour $k(x) = k_0$, correspondant à l'eau pure. En traits pleins : solution pour $k(x)$ défini par (6.6), traduisant l'accumulation de bulles aux ventres.



b. Allure de la fonction $f(x)$ de la relation (6.6). L'amplitude de cette fonction traduit essentiellement la densité locale de bulles.

FIGURE 6.13 – Illustration de la transition entre un régime d'onde stationnaire et l'effet d'écran.

6.5.2 Implication sur les champs de bulle à haute fréquence

Plusieurs études récentes Gonze et al. (1998) ont été consacrées à la mesure de l'activité de cavitation dans des systèmes à hautes fréquence. Un résultat récurrent est que cette activité suit approximativement un profil d'ondes stationnaires non amorti, et l'effet d'écran n'a semble-t-il jamais été mentionné dans ce type de système.

Il semble que cette différence entre des excitations à haute et à basse fréquence (typiquement 1 MHz et 20 kHz) puisse être interprétée en termes de populations de bulles. Comparons tout d'abord les tailles de résonance correspondant à ces deux fréquences : à 20 kHz, elle vaut 158 μm contre 3.2 μm pour 1 MHz.

Les bulles présentes aux ventres sont donc en tout état de cause de taille inférieure à 3 μm ; dans ces conditions, l'examen de la formule (6.5) montre que les perturbations du nombre d'onde liées à la présence des bulles sont vraisemblablement bien plus faibles qu'à basse fréquence. Ainsi, une onde stationnaire pourrait se maintenir en dépit de l'accumulation des bulles aux ventres, et la transition vers l'effet d'écran ne pas se produire. On peut donc soupçonner que ce dernier n'intervient jamais à haute fréquence.

De manière générale, le fait que le nombre d'onde soit faiblement perturbé par la présence des bulles suggère que ces dernières auraient somme toute une influence négligeable sur l'onde acoustique, et que la compressibilité du milieu est approximativement celle du liquide pur. D'un point de vue énergétique, cela signifie que les énergies mise en jeu par le mouvement radial des bulles sont négligeables, et dans ces conditions, le problème devrait être traité comme un problème d'acoustique d'un milieu monophasique.

Les puissances acoustiques étant malgré tout importantes, les hypothèses de l'acoustique linéaire sont vraisemblablement trop restrictives. Cette dernière remarque est supportée par l'observation classique de l'effet de «fontaine acoustique» dans les expérimentations à haute fréquence, consistant en un jet de liquide apparaissant à l'interface libre liquide-air. Cet effet sous-entend un mouvement d'ensemble du fluide, dont l'existence ne peut être mise en évidence par l'acoustique linéaire.

Il semblerait donc que la physique intervenant à basse fréquence, consistant à traiter le milieu comme un liquide à bulles, est très différente de celle décrivant le régime des hautes fréquences, régi plutôt par les équations de l'acoustique

non-linéaire. Nous pensons que cette différence est liée essentiellement aux populations de bulles distinctes engendrées dans les deux cas.

Il existe certainement une zone de raccordement entre les deux théories, vraisemblablement très difficile à mettre en évidence, du fait de la médiation de la population de bulles. Ceci indiquerait qu'il serait illusoire de chercher la solution du problème de cavitation acoustique sous la forme d'un modèle unique.

6.6 Suggestions pour des expérimentations

Sur le plan expérimental, des études de plus en plus nombreuses reportent des résultats de mesure d'activité de cavitation, par des méthodes calorimétriques, piézoélectriques, ou chimiques. L'hypothèse défendue dans ce chapitre et le précédent, selon laquelle champ acoustique et population de bulles sont étroitement corrélées, suggère que des mesures de taux de vide sont également souhaitables. Un premier pas dans cette voie a été franchi récemment par Labouret (1998) qui mesure un taux de vide global et une distribution de tailles de bulles en observant le décalage fréquentiel d'une cavité électromagnétique lié à la présence des bulles.

D'autre part, pour pouvoir confronter aisément une théorie à des résultats expérimentaux, il serait souhaitable de se rapprocher le plus possible d'une configuration monodimensionnelle, autrement dit d'une onde plane.

Dans une telle configuration la mesure simultanée du taux de vide, ou mieux, de la distribution de tailles de bulles, et de la pression acoustique en fonction de la distance à l'émetteur fournirait une information précieuse sur le couplage entre l'onde acoustique et la population de bulles.

Même une mesure locale assez grossière du taux de vide pourrait déjà être utile pour «capturer» l'effet d'écran. Si un tel dispositif existait, pour vérifier l'hypothèse précédente sur la transition vers l'effet d'écran, nous proposerions l'expérimentation suivante : on place un capteur de taux de vide au voisinage de la source, et un autre à l'emplacement présumé d'un ventre pour une onde stationnaire dans le liquide pur, cet emplacement pouvant être déterminé à partir de la nature du réflecteur.

En augmentant graduellement l'amplitude de la source à partir de 0, le taux de vide au niveau du ventre devrait subir un premier saut au moment où son amplitude passe au-dessus du seuil de diffusion rectifiée. Ensuite un deuxième

saut important devrait intervenir lorsque la fragmentation intervient au niveau du ventre, limite la coalescence et donc le départ de grosses bulles vers les noeuds voisins. On pourrait vérifier à l'oeil nu que juste avant ce saut, le liquide subit un dégazage important.

Il est intéressant au cours de ce processus de traquer le taux de gaz au voisinage de la source pour voir à quel moment l'effet d'écran intervient, et s'il correspond bien à une rupture de l'onde stationnaire. La mise en place de deux capteurs de pression à faible distance de la source permettrait d'observer simultanément l'évolution du gradient de pression acoustique.

Par ailleurs, pour étudier l'influence de la hauteur de liquide sur l'effet d'écran, on pourrait envisager de remplir très lentement par le haut un récipient insonifié à amplitude constante par le bas, et de recueillir en continu des mesures de pression et/ou de taux de vide au voisinage de la source. Cette dernière approche paraît intéressante pour déterminer les conditions optimales d'utilisation d'un dispositif à ultrasons.

6.7 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était d'examiner la cohérence du modèle écrit dans le chapitre précédent avec l'existence d'une population de bulle et d'un profil de pression stables au cours du temps. Pour cela, nous avons tenté d'interpréter l'effet d'écran, qui décrit la présence d'un grand nombre de bulles au voisinage de la source, et peut être raisonnablement considéré comme un régime permanent.

L'apparition d'un certain nombre de contradictions nous a conduit à envisager une amélioration du modèle à deux niveaux : l'écriture d'une équation de conservation sur la quantité de gaz plutôt que sur le nombre de bulles, et l'abandon de l'hypothèse linéaire pour le calcul des seuils de fragmentation et des taux de croissance par diffusion rectifiée. Cette dernière approche ne pose pas de problème particulier et est rencontrée de plus en plus fréquemment dans la littérature.

Nous avons également suggéré un mécanisme de transition vers l'effet d'écran à partir d'une onde stationnaire non amortie à mesure que l'amplitude de la source augmente. Cette suggestion est en partie supportée par le calcul des solutions de l'équation de propagation tenant compte d'une accumulation de bulles aux ventres.

Enfin, un ensemble de suggestions expérimentales a été proposé, et fait apparaître un besoin essentiel en un capteur de taux de vide local, même de faible résolution, de capteurs de pressions fiables et d'un dispositif susceptible d'engendrer une onde quasi-plane.

Conclusion générale

La motivation initiale de ce travail était l'écriture d'un code de calcul permettant de prédire le champ acoustique en tout point du milieu dans une expérience de cavitation.

La cavitation acoustique étant définie par la présence de bulles oscillant sous l'influence d'une onde acoustique de forte amplitude, nous avons postulé que le phénomène majeur influant sur la propagation de l'onde était la présence de ces bulles. Nous avons recherché dans la littérature des milieux diphasiques un modèle susceptible de décrire correctement ce phénomène de propagation.

Le modèle de Caflish contient l'essentiel de la physique du problème, et peut décrire a priori la propagation d'ondes non-linéaires d'amplitude quelconque dans un liquide contenant une population de bulles donnée. La relation de dispersion linéaire dérivée de ce modèle, fournissant des valeurs de vitesse du son et d'atténuation, est souvent mentionnée dans la littérature sur la cavitation acoustique, bien que cette dernière implique des amplitudes élevées.

Nous nous sommes donc attaché dans un premier temps à mettre en évidence les effets de la non-linéarité du problème. Pour ce faire, nous avons développé une méthode numérique pour résoudre un problème type d'ondes stationnaires dans une géométrie monodimensionnelle fermée, en supposant la population de bulles monodisperse et uniforme dans l'espace, et en la considérant comme une donnée du problème.

Pour des fréquences acoustiques basses, c'est-à-dire très inférieures à la taille de résonance de la bulle, nous avons pu observer que les distorsions de l'onde obtenue étaient caractéristiques de la combinaison de trois phénomènes, dispersion, non-linéarité et dissipation. Pour ce domaine de fréquences, il est remarquable que les effets non-linéaires apparaissent pour des amplitudes de pression aussi faibles que 0.05 atm.

Ensuite, la zone de fréquences située au voisinage de la moitié de la fréquence

de résonance des bulles a été explorée. Les résultats non-linéaires prédisent en particulier que la dissipation d'énergie s'effectue essentiellement au voisinage de la source, ce qui correspond qualitativement à l'observation classique d'une activité de cavitation resserrée au voisinage de cette dernière.

Les amplitudes mises en jeu dans ces simulations sont bien sûr très inférieures aux amplitudes de pression mises en jeu par la cavitation acoustique, et par ailleurs, l'assignation arbitraire d'une population de bulles monodisperse et uniforme dans l'espace ne correspond pas à la réalité expérimentale. Mais nos résultats de simulation montrent clairement les limitations de la théorie linéaire, et de quelle manière la non-linéarité des oscillations de la bulle influe sur la propagation de l'onde.

Dans les deux derniers chapitres de cette étude, nous nous sommes intéressés à la manière dont la population de bulles s'auto-organise dans un champ acoustique. Dans cette optique, nous avons identifié et modélisé les principaux phénomènes qui selon nous, agissent sur la répartition spatiale et la distribution de tailles des bulles : la diffusion rectifiée, la migration des bulles, la coalescence et la fragmentation. Nous avons réuni ces résultats dans une équation de conservation du nombre de bulles, couplée à une équation de propagation dérivée du modèle de Caflish linéarisé.

Dans le cadre d'un régime permanent où la population de bulles et l'amplitude de l'onde sont constantes au cours du temps en chaque point du milieu, nous pensons que la résolution de ce système est envisageable, et pour vérifier la pertinence d'une telle démarche, nous avons confronté qualitativement notre modèle à l'effet d'écran, phénomène classique à basse fréquence.

Cette approche nous a permis de montrer que la répartition spatiale du gaz dissous jouait un rôle important, ce qui suggère l'utilisation d'une équation de conservation de la quantité de gaz plutôt que du nombre de bulles. Par ailleurs, l'hypothèse linéaire doit être abandonnée pour la modélisation de la diffusion rectifiée et de la fragmentation, et remplacée par une simulation numérique intensive d'une équation de dynamique de bulles. Cet ensemble de remarques devraient guider les évolutions ultérieures de ce modèle.

Nous avons enfin souligné, sur la base d'observations expérimentales récentes, que si l'influence des bulles était fondamentale pour des fréquences dites basses, de l'ordre de 20 kHz, elle est peut-être négligeable pour des hautes fréquences, de l'ordre du MHz. Pour ces dernières, l'approche du problème en tant que milieu diphasique est peut-être erronée, et ce point devrait être clarifié antérieurement à toute écriture d'un modèle plus complet.

Nous avons approché le phénomène de deux manières différentes : d'un coté nous avons réduit la complexité de la population de bulles, mais conservé l'aspect non-linéaire du problème ; de l'autre, nous avons pris en compte la population de bulles dans son ensemble, en sacrifiant à l'hypothèse linéaire. La réalité est quelque part entre les deux approches, mais il nous semble que la deuxième soit la plus prometteuse, dans la mesure où elle intègre un grand nombre de processus physiques.

Nous souhaitons avoir constitué par ce travail un ensemble de pistes suffisamment solides pour servir de base à l'écriture d'un modèle cohérent de champ de cavitation. Cette perspective est ambitieuse eu égard à la disparité des phénomènes physiques et des échelles de temps intervenant dans le problème. La conduite en parallèle d'une étude expérimentale, effectuée dans des conditions les plus simples possibles, s'avère nécessaire pour valider une réflexion théorique plus poussée.

Nomenclature

Nomenclature

Nomenclature du chapitre 1

A_g	surface de la bulle
A_∞	surface géométrique à l'infini de la bulle
A_R	interface liquide-bulle
A	gain des oscillations linéaires de la bulle
a_n	coefficients dans la méthode de Galerkin
b	coefficient d'amortissement des oscillations linéaires de la bulle
c	vitesse du son dans le liquide
c_0	vitesse du son dans le liquide au repos
c_p, c_{p_g}	capacité calorifique massique du gaz à pression constante
c_{p_l}	capacité calorifique massique du liquide à pression constante
c.c.	complexe conjugué
$\mathbf{D}$	tenseur vitesse de déformation dans le liquide
D, D_g	diffusivité thermique du gaz
D_l	diffusivité thermique du liquide
d_g	longueur de pénétration thermique dans le gaz
d_l	longueur de pénétration thermique dans le liquide
$\mathbf{e_r}$	vecteur unitaire radial
E	énergie interne du liquide
E_g	énergie interne de la bulle
E_{p_g}	énergie potentielle de compression de la bulle
E_{p_σ}	énergie potentielle de déformation de l'interface liquide-bulle
E_p	$E_{p_g} + E_{p_\sigma}$

f	fréquence acoustique
f_0	fréquence propre de la bulle
h	enthalpie massique du liquide
h_g	enthalpie massique du gaz
K	énergie cinétique du liquide
Ma	vitesse radiale de la bulle sur vitesse du son dans le liquide
$\mathbf{n}$	vecteur normal
p_0	pression hydrostatique
p	pression dans le liquide
p_{g_0}	pression initiale dans la bulle
p_g	pression dans la bulle
p_R	pression dans le liquide au voisinage de la bulle
p_a	dépression acoustique
p_B	seuil de Blake
p_T	seuil d'Apfel
p_∞	pression à l'infini de la bulle
P	amplitude complexe adimensionnelle de p_∞
P_{mec}	puissance mécanique fournie au système liquide+bulle
$\mathcal{P}_g$	amplitude adimensionnelle de la pression gaz
P_g	amplitude complexe adimensionnelle de la pression gaz
Q	chaleur cédée par la bulle au liquide
Q_∞	chaleur évacuée à l'infini de la bulle
R_0	rayon d'équilibre de la bulle
R	rayon instantané de la bulle
R_{res}	rayon de résonance de la bulle
R_B	rayon de Blake
r	distance à partir du centre de la bulle
$\mathcal{R}$	constante des gaz parfaits
R_T	rayon inertiel d'Apfel

s	entropie massique du liquide
S_g	entropie de la bulle
t	temps
T	période acoustique - température dans le gaz
T_∞	température infiniment loin de la bulle et initiale dans le liquide
T_C	température au centre de la bulle
T_R	température à l'interface liquide-bulle
T_k	polynôme de Chebyshev de degré k
$\mathbf{u}$, u	vecteur vitesse radiale dans le liquide
$\mathbf{u_g}$, u_g	vecteur vitesse radiale dans le gaz
V_g	volume de la bulle
V_l	volume géométrique occupé par le liquide
v, w, s	nouvelles variables dans l'équation de bulle
$\mathcal{X}$	amplitude adimensionnelle du rayon de la bulle
X	amplitude complexe adimensionnelle du rayon de la bulle
y	distance adimensionnelle à partir du centre de la bulle r/R
ϵ	amplitude adimensionnelle de la dépression acoustique
γ	rapport des capacités calorifiques du gaz
Γ	1 si hypothèse isotherme γ si hypothèse adiabatique
λ, λ_g	conductivité thermique du gaz
λ_0	conductivité thermique du gaz au repos
λ_l	conductivité thermique du liquide
η	exposant polytropique
μ	viscosité dynamique du liquide
μ_{th}	viscosité ajoutée
ϕ	potentiel des vitesses dans le liquide
Φ	facteur complexe entre pression gaz et rayon
Φ_k	fonctions de base pour la méthode de Galerkin
ψ	flux de chaleur dans la bulle

ρ	masse volumique du liquide
ρ_g	masse volumique du gaz
σ	tension superficielle
$\mathbf{\Sigma_v}$	tenseur des contraintes visqueuses dans le liquide
Θ	amplitude adimensionnelle des variations de température dans la bulle
θ	amplitude complexe adimensionnelle des variations de température dans la bulle
τ	variable remplaçant la température dans la bulle
χ	paramètre adimensionnel $D/\omega R_0^2$
ω	pulsation acoustique
ω_0	pulsation propre de la bulle

Nomenclature du chapitre 2

Sauf mention contraire ci-dessous, l'indice 0 désigne la valeur à l'équilibre d'une grandeur physique, l'indice g se rapporte au gaz et l'indice l au liquide.

A	surface délimitant un volume de mélange liquide-bulle
A_g	surface d'une bulle
b	coefficient d'amortissement des oscillations linéaires de la bulle
c_l	vitesse du son dans le liquide
C_l	capacité calorifique massique du liquide
c	ω/k vitesse du son équivalente dans le milieu liquide-bulles
c_m	vitesse du son effective dans le milieu à fréquence nulle
C	$= 1 - (c_m/c_l)^2$
$\mathcal{C}_M$	configuration de M bulles
d	distance comptée à partir du réflecteur
D	$= \eta\rho_l c_l^2/p_0$
$\mathcal{E}$	densité volumique d'énergie mécanique du liquide
$\mathbf{e_x}$	vecteur unitaire suivant l'axe des x
f	fréquence acoustique
f_0	fréquence propre de la bulle
g	grandeur à moyenner facteur de diffraction d'un champ acoustique par une bulle
$\mathcal{I}$	intensité acoustique
k_l	nombre d'onde dans le liquide pur
k	nombre d'onde
K_l	énergie cinétique du liquide dans son mouvement radial

L	longueur du domaine
$\mathcal{M}$	paramètre adimensionnel mesurant la viscosité réduite dans l'équation de Rayleigh
M	$\mathcal{M}/\epsilon^{1/2}$
m	paramètre adimensionnel déterminant la forme du choc
N	nombre de bulles par unité de volume
$\mathbf{n}$	vecteur normal
$\mathcal{O}$	$= \omega/\omega_0$
p_0	pression hydrostatique
$p(x,t)$	pression macroscopique dans le milieu liquide-bulles
$p_g(x,t)$	pression dans la bulle
p_a	amplitude de pression imposée par la source
p_a^*	amplitude de pression adimensionnelle imposée par la source
P_{mec}	puissance mécanique fournie au système liquide+bulle
$P(x)$	amplitude complexe locale de la pression macroscopique
P_0	amplitude complexe de la pression macroscopique
$P(\mathcal{C}_M)$	densité de probabilité des configurations $\mathcal{C}_M$
P^*	pression acoustique adimensionnelle
P^0,P^1	développement asymptotique de P^*
$q(\mathbf{x})$	puissance volumique moyenne dissipée par les bulles
q	pression acoustique rapportée à la pression imposée par la source
R_0	rayon d'équilibre de la bulle
$R(x,t)$	rayon instantané d'une bulle
$\mathbf{r}_1$,... $\mathbf{r}_M$	centres de masse des particules 1, ... M
R^*	amplitude adimensionnelle des oscillations du rayon de la bulle
R^0, R^1	développement asymptotique de R^*
t	temps

T	période acoustique température macroscopique dans le milieu liquide-bulles
$\mathbf{u}(x,t)$	champ de vitesse macroscopique dans le milieu liquide-bulles
$u(x,t)$	
u_a	amplitude de vitesse imposée par la source
$U(x)$	amplitude complexe locale de la vitesse macroscopique
U_0	amplitude complexe de la vitesse macroscopique
U^*	vitesse adimensionnelle dans le milieu
U^0, U^1	développement asymptotique de U^*
U	vitesse de propagation du choc
V_g	volume instantané d'une bulle
V_{g_0}	volume de la bulle à l'équilibre
V	volume géométrique occupé par le milieu liquide-bulle
$\mathbf{x}$	coordonnées spatiales macroscopiques
$\mathbf{x}'$	coordonnées spatiales microscopiques
x	abscisse macroscopique
X	amplitude adimensionnelle du rayon de la bulle
z	abscisse dans le repère lié au choc
$\beta(\mathbf{x},t)$	taux volumique de gaz
β_0	taux volumique de gaz à l'équilibre
δ	rayon sur longueur d'onde déphasage pression-vitesse
ϵ	distance inter-bulles sur longueur d'onde amplitude adimensionnelle de la pression imposée par la source
ζ	abscisse dans le repère lié au choc
η	coefficient polytropique
γ	coefficient du terme non linéaire dans l'équation de KdVB
λ	longueur d'onde
λ_l	conductivité thermique du liquide
μ	viscosité du liquide
μ_{th}	viscosité thermique équivalente

ν	coefficient du terme dissipatif dans l'équation de KdVB
ϕ	potentiel des vitesses
ϕ_a	potentiel des vitesses de l'onde acoustique incidente
ψ	phase complexe de l'onde stationnaire
ψ_r	partie réelle de la phase complexe ψ
ψ_i	partie imaginaire de la phase complexe ψ
ξ	abscisse adimensionnelle
ρ	densité macroscopique moyenne
ρ_l	masse volumique du liquide
σ	tension superficielle
	coefficient du terme dispersif dans l'équation de KdVB
τ	temps adimensionnel
ω	pulsation de la source
ω_0	pulsation propre des bulles
Ω	$\mathcal{O}/\epsilon^{1/2}$

Nomenclature du chapitre 3

$[\mathcal{K}]$, $\mathcal{K}_{ij}$	matrice dans la formulation aux éléments finis
L	longueur du domaine
$[\mathcal{M}]$, $\mathcal{M}_{ij}$	matrice dans la formulation aux éléments finis
$\mathbf{n}$	vecteur normal
n_n	nombre de noeuds du maillage
n_e	nombre d'éléments du maillage
n_u	nombre de noeuds où la vitesse est imposée
n_ϕ	nombre de noeuds où le potentiel est imposé
n_v	nombre de noeuds intérieurs au domaine
$N_j(\mathbf{x})$	fonctions polynômiales par morceaux
p_0	pression hydrostatique
$p(\mathbf{x}, t)$	pression macroscopique dans le milieu liquide-bulles
$p_g(\mathbf{x}, t)$	pression dans la bulle
p_a	amplitude de pression imposée par la source
p_a^*	amplitude de pression adimensionnelle imposée par la source
$[\mathcal{P}]$, $\mathcal{P}_i$	vecteur des excitations en potentiel (ou pression)
R_0	rayon d'équilibre d'une bulle
$R(\mathbf{x}, t)$	rayon instantané d'une bulle
$R_j(t)$	rayons instantanés des bulle au noeud j
S_u	frontière sur laquelle la vitesse est imposée
S_ϕ	frontière sur laquelle le potentiel ou est imposé
t	temps
$[\mathcal{T}]$, $\mathcal{T}_{ij}$	matrice dans la formulation aux éléments finis
$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$	champ de vitesse macroscopique dans le milieu liquide-bulles

$\mathbf{U_0}(\mathbf{x}, t)$	vitesse imposée sur la frontière S_u
$U_{0_k}(t)$	vitesse imposée au noeud k de la frontière S_u
$[\mathcal{U}]$, $\mathcal{U}_i$	vecteur des excitations en vitesse
V	volume géométrique occupé par le milieu liquide-bulle
$\mathbf{x}$	coordonnées spatiales macroscopiques
β_0	taux volumique de gaz au repos
$\beta(\mathbf{x}, t)$	taux volumique de gaz
$\phi(\mathbf{x}, t)$	potentiel des vitesse macroscopique dans le milieu liquide-bulles
$\phi_j(t)$	potentiel aux noeud j
$\Phi_0(\mathbf{x}, t)$	potentiel imposé sur la frontière S_ϕ
ψ	fonction test
ω	pulsation de la source

Nomenclature du chapitre 4

c_l	vitesse du son dans le liquide
f	fréquence acoustique
f_0	fréquence propre de la bulle
F	fréquence de modulation
k	nombre d'onde
L	longueur du domaine
p_0	pression hydrostatique
p_a	pression acoustique imposée par la source
p_a^*	p_a/p_0
$q(x)$	puissance volumique moyenne dissipée par les bulles
R_0	rayon d'équilibre de la bulle
t	temps
T	période acoustique
	température dans le gaz
u_a	vitesse imposée par la source
x	abscisse
β_0	taux volumique de gaz à l'équilibre
γ	rapport des capacités calorifiques du gaz
λ	longueur d'onde
	conductivité thermique du liquide
μ	viscosité dynamique du liquide
ρ_l	masse volumique du liquide
σ	tension superficielle
ϕ_j	potentiel des vitesses dans le milieu
ω	pulsation acoustique

ω_j pulsation sous-harmonique

Nomenclature du chapitre 5

A	moyenne temporelle de R/R_0
a	coefficient de proportionalité pour le nombre de bulles éjectées
a_n	coefficient de l'équation de Mathieu
B	moyenne temporelle de $(R/R_0)^4$
b_n	facteur d'amortissement des oscillations de surface
b	facteur d'amortissement des oscillations de la bulle paramètre d'impact
$c(r,t)$	concentration en gaz dissous
c_0	concentration à la saturation pour une pression p_0
c_i	concentration en gaz dissous loin de la bulle
c_l	vitesse du son dans le liquide
$c.c.$	complexe conjugué
C	moyenne temporelle de $p_g/p_0.(R/R_0)^4$
C_2	coefficient du terme quadratique constant dans l'expression linéaire de R/R_0
C_r	vitesse radiale de la bulle sur vitesse de l'écoulement environnant
$\mathcal{C}_{\text{app}}$	opérateur intégral d'apparition par coalescence
$\mathcal{C}_{\text{disp}}$	opérateur intégral de disparition par coalescence
C^+	terme source lié à la coalescence
C^-	terme puit lié à la coalescence
D	coefficient de diffusion (de masse)
e_n	coefficient de proportionnalité pour le nombre de bulles éjectées
f	fréquence acoustique
$\mathbf{F_B}$	force de Bjerknes primaire
$\mathbf{F_M}$	force de masse ajoutée
$\mathbf{F_V}$	force de trainée visqueuse
$\mathbf{F_{21}}$	force de Bjerknes secondaire
F_i^-	Terme puit lié à la fragmentation instable
F_i^+	Terme source lié à la fragmentation instable

F_s^-	Terme puit lié à la fragmentation stable
F_s^+	Terme source lié à la fragmentation stable
$\mathbf{g}$	pesanteur
$\mathbf{G}$	$2\mathbf{F_B}/\rho f - 2V\mathbf{g}/f$
$\tilde{\mathbf{G}}$	partie oscillatoire de G
$\mathbf{G}^0$, $\mathbf{G}^1$	développements de $\mathbf{G}$ à l'ordre 0 et 1 en ϵ
H	constante du mouvement d'approche de deux bulles
k	constante de Henry nombre d'onde
m	nombre de bulles éjectées par fragmentation instable ordre d'un harmonique sphérique
m_p	masse d'une bulle
n	ordre d'un harmonique sphérique
$\mathbf{n_{21}}$	vecteur unitaire de la bulle 2 vers la bulle 1
N	fonction de distribution de taille de bulles
p_0	pression hydrostatique
p	pression macroscopique
p_g	pression dans la bulle
p_m	pression aux ventres
P	amplitude complexe de la pression acoustique
P^*	amplitude complexe conjuguée de la pression acoustique
R_0,R_{0_1},R_{0_2}	rayon d'équilibre de la bulle
R	rayon instantané de la bulle
Re	nombre de Reynolds
r_s	déformation de la surface de la bulle
s_n	coefficient de proportionnalité pour le rayon des bulles éjectés
S_0	$R_{0_1} + R_{0_2}$
t	temps

T	période acoustique
T_0	variable de temps rapide
T_1	variable de temps lente
$\mathbf{u}$	champ de vitesse dans le liquide
$\mathbf{u}_a$	champ de vitesse imposée par l'onde acoustique
$\mathbf{u}_2$	champ de vitesse engendré par la bulle 2
$\mathbf{v}$	vitesse terminale de la bulle
$\mathbf{v_0}$	vitesse relative initiale entre deux bulles
$\mathbf{v_{0_i}}$	vitesse initiale de la bulle i
V, V_1, V_2	Volume d'une bulle
V_0	Volume d'une bulle à l'équilibre
w	taux de croissance/dissolution
$\mathbf{w}$	$V(\mathbf{u}-\mathbf{v})$
$\mathbf{w}^0$, $\mathbf{w}^1$	développements de $\mathbf{w}$ à l'ordre 0 et 1 en ϵ
$\mathbf{x}$,x	coordonnées spatiales
X	amplitude complexe adimensionnelle des variations de rayon de la bulle
X_i	idem pour la bulle i
X^*,X_i^*	conjugué de X, X_i
y_n	déformation de la surface de la bulle pour l'harmonique d'ordre n
Y_n^m	harmonique sphérique d'ordre n,m
Z	$(R_0/R)^2$
z_n	$y_n(R/R_0)^{3/2}$
α	$\dfrac{1}{\omega_0^2-\omega^2-2ib\omega}$
γ	$\alpha/\rho R_0^2$
δ	amplitude adimensionnelle des variations de volume de la bulle

δ_n coefficient dans l'équation de Matthieu
ϵ $= 1/f\tau$ petit paramètre dans la méthode des échelles multiples.
ϵ_i fonction indicatrice du seuil de cavitation instable
ϵ_s fonction indicatrice du seuil de cavitation stable
ϵ_n coefficient dans l'équation de Matthieu
η $= \chi/v_0 S_0$ paramètre adimensionnel pour la coalescence
κ coefficient dans la force de Bjerknes secondaire
λ longueur d'onde acoustique
λ_s longueur d'onde des oscillations de surface
μ viscosité dynamique du liquide
μ_n facteur d'amplification paramétrique
ν viscosité cinématique du liquide
ρ masse volumique du liquide
σ tension superficielle
section de collision
τ constante de temps d'établissement de la vitesse finale d'une bulle
τ_i idem pour la bulle i
θ angle en coordonnées sphériques
ϕ angle en coordonnées sphériques
phase de l'onde stationnaire
χ coefficient dans l'équation du mouvement d'approche de deux bulles
ω pulsation acoustique
ω_0 pulsation propre de la bulle
ω_n pulsation propre du mode d'oscillation surfacique d'ordre n

Nomenclature du chapitre 6

b	facteur d'amortissement des oscillations de la bulle
c_l	vitesse du son dans le liquide
k_0	nombre d'onde dans le liquide
k	nombre d'onde dans le milieu
k_i	partie imaginaire de k
N	fonction de distribution de taille des bulles
p_0	pression hydrostatique
P	amplitude complexe de la pression acoustique
P_c	P au point d'intersection entre seuil de Blake et de diffusion rectifiée
P_m	P au niveau de la source
P_D	minimum du seuil de diffusion rectifiée
q	vdP/dx
R_0	rayon d'équilibre de la bulle
$R_{\max}$	rayon maximum atteint par la bulle sur une oscillation
v	vitesse terminale d'une bulle
w	taux de croissance/dissolution
x	abscisse
x_c	abscisse du point d'intersection du seuil de Blake et de diffusion rectifiée
x_f	abscisse de la fin de la zone de cavitation forte
x_s	abscisse de la fin de la zone de cavitation stable
ω	pulsation acoustique

Annexes

Annexe A

Rappel des équations de la mécanique des fluides

Cette annexe rappelle les trois équations de conservation de la mécanique des fluides, particulièrement l'équation de conservation de l'énergie qui peut s'écrire sous diverses formes. On se place dans le cas d'un fluide visqueux newtonien, en l'absence de forces volumiques.

Les équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement s'écrivent respectivement, sous forme eulerienne

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0 \tag{A.1}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} \right] = \mathbf{div}\, \boldsymbol{\Sigma} \tag{A.2}$$

ou bien sous forme lagrangienne, $d/dt = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}.\boldsymbol{\nabla}$ représentant une dérivée temporelle en suivant le fluide dans son mouvement :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{A.3}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{div}\, \boldsymbol{\Sigma} \tag{A.4}$$

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}$ s'écrit, pour un fluide Newtonien :

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}_v \tag{A.5}$$

où $\boldsymbol{\Sigma}_v$ tenseur des contraintes visqueuses vaut

$$\boldsymbol{\Sigma}_v = -\left(\frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u}\right)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} = -\left(\frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u}\right)\mathbf{I} + \mu\left(\mathbf{grad}\,\mathbf{u} + \mathbf{grad}\,\mathbf{u}^T\right) \tag{A.6}$$

Pour écrire l'équation de conservation de l'énergie considérons un volume de fluide V, *que l'on suit dans son mouvement*, limité par une surface A (dont on notera $\mathbf{n}$ la normale sortante), et appliquons lui le premier principe. La puissance des forces extérieures est celle des forces surfaciques $\mathbf{\Sigma}.\mathbf{n}$ en tous les points de la surface A et s'écrit donc

$$\mathcal{P}_{ext} = \iint_A (\mathbf{\Sigma n}).\mathbf{u}\, dA = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{\Sigma u})\, dV \tag{A.7}$$

La puissance calorifique reçue par le volume V est égale à la quantité de chaleur traversant la surface A de l'extérieur vers l'intérieur par unité de temps, soit en notant ψ le flux

$$\mathcal{P}_{th} = -\iint_A \psi.\mathbf{n}\, dA = -\iiint_V \operatorname{div}\psi\, dV \tag{A.8}$$

Si nous notons respectivement E et K les énergies internes et cinétiques de l'ensemble du fluide dans le volume V, et e et k les énergies internes et cinétiques massiques, la conservation de l'énergie s'écrit

$$\frac{d(E+K)}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint \rho(e+k)\, dV = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{\Sigma u})\, dV - \iiint_V \operatorname{div}\psi\, dV \tag{A.9}$$

Puisque le fluide est suivi dans son mouvement, $\rho\, dV$ est la masse dm d'un élément de fluide infinitésimal suivi dans son mouvement, et cette masse reste constante au cours du temps. Pour cette raison, la première intégrale peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho(e+k)\, dV = \iiint_V \rho\frac{d(e+k)}{dt}\, dV \tag{A.10}$$

La relation obtenue devant être valable pour tout volume V, on peut donc écrire localement

$$\rho\frac{d(e+k)}{dt} = \operatorname{div}(\mathbf{\Sigma u}) - \operatorname{div}\psi \tag{A.11}$$

De plus, en effectuant le produit scalaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement par $\mathbf{u}$, on obtient l'expression de l'énergie cinétique massique

$$\begin{aligned}\rho\frac{dk}{dt} &= (\mathbf{div}\,\mathbf{\Sigma}).\mathbf{u} \\ &= \operatorname{div}(\mathbf{\Sigma u}) - \mathbf{\Sigma}:\mathbf{grad}\,\mathbf{u}\end{aligned} \tag{A.12}$$

En soustrayant les deux équations (A.11) et (A.12), on obtient les variations de l'énergie interne massique

$$\rho \frac{de}{dt} = \mathbf{\Sigma} : \mathbf{grad}\, \mathbf{u} - \operatorname{div} \psi \tag{A.13}$$

Si nous explicitons maintenant le tenseur des contraintes par (A.5), ces trois équations deviennent respectivement

$$\rho \frac{d(e+k)}{dt} = -\operatorname{div}(p\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{\Sigma}_v \mathbf{u}) - \operatorname{div} \psi \tag{A.14}$$

$$\rho \frac{dk}{dt} = -\operatorname{div}(p\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{\Sigma}_v \mathbf{u}) + p \operatorname{div} \mathbf{u} - \mathbf{\Sigma}_v : \mathbf{grad}\, \mathbf{u} \tag{A.15}$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{\Sigma}_v : \mathbf{grad}\, \mathbf{u} - \operatorname{div} \psi \tag{A.16}$$

La dernière équation peut également s'exprimer en fonction de l'enthalpie en utilisant sa définition

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} \\ &= \frac{de}{dt} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} \end{aligned}$$

le passage de la première à la deuxième ligne résultant de l'équation de conservation de la masse (A.3). On en déduit donc, en remplaçant cette expression dans (A.16)

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} + \mathbf{\Sigma}_v : \mathbf{grad}\, \mathbf{u} - \operatorname{div} \psi \tag{A.17}$$

qui est l'expression utilisée dans la section (1.5). Sous forme intégrale sur un volume V de fluide suivi dans son mouvement, l'équation (A.15) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} = &- \iint_A p\mathbf{u}.\mathbf{n}\, dA + \iint_A (\mathbf{\Sigma}_v \mathbf{n}).\mathbf{u}\, dA \\ &+ \iiint_V p \operatorname{div} \mathbf{u}\, dV - \iiint_V (\mathbf{\Sigma}_v : \mathbf{grad}\, \mathbf{u})\, dV \end{aligned} \tag{A.18}$$

Les deux premières intégrales surfaciques correspondent nous l'avons vu à la puissance des forces extérieures, et les deux dernières correspondent donc,

d'après le théorème de l'énergie cinétique, à la puissance des forces intérieures :

$$\mathcal{P}_{int} = \underbrace{\iiint_V p \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV}_{\substack{\text{Puissance des forces} \\ \text{intérieures de pression}}} + \underbrace{\iiint_V -(\mathbf{\Sigma}_v : \mathbf{grad}\, \mathbf{u}) \, dV}_{\substack{\text{Puissance des forces} \\ \text{intérieures visqueuses}}} \tag{A.19}$$

Le premier terme correspond à des variations de densité à l'intérieur du volume de fluide, et est nul pour un liquide incompressible. Pour un écoulement isentropique ou isotherme (équation d'état en $p(\rho)$), il peut être exprimé comme l'opposé d'une variation d'énergie potentielle de compression.

Le deuxième terme correspond à un travail des forces visqueuses lors de la déformation du volume V. On montre facilement d'après l'expression du tenseur des contraintes (A.5), que l'on a

$$\mathbf{\Sigma}_v : \mathbf{grad}\, \mathbf{u} = 2\mu \left[\mathbf{E} - \left(\frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \mathbf{I} \right]^2$$

et cette grandeur est donc strictement positive. Exprimons les variations d'énergie interne du volume V suivi dans son mouvement :

$$\frac{dE}{dt} = -\iiint_V p \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV + \iiint_V -(\mathbf{\Sigma}_v : \mathbf{grad}\, \mathbf{u}) \, dV + \iint_A \psi . \mathbf{n} \, dA \tag{A.20}$$

$$= \underbrace{-\iiint_V p \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV + \iiint_V 2\mu \mathbf{E}^2 \, dV}_{-\mathcal{P}_{int}} + \underbrace{\iint_A \psi . \mathbf{n} \, dA}_{\mathcal{P}_{th}} \tag{A.21}$$

Il est clair d'après cette expression que la puissance des forces visqueuses lors de la déformation tend à augmenter l'énergie interne du fluide.

Annexe B

Méthode spectrale pour la résolution des effets thermiques dans la bulle

Cette annexe résume la méthode employée par Kamath and Prosperetti (1989) et décrit le système d'équations différentielles ultimement obtenu.

La température T est remplacée par la variable

$$\tau = \int_{T_\infty}^{T} \lambda(s) ds \tag{B.1}$$

On a alors

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda_0 T_\infty \lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_{g_0} D_0 \frac{\partial \tau}{\partial y} \tag{B.2}$$

ce qui suggère l'adimensionalisation suivante pour τ :

$$\tau = p_{g_0} D_0 \tau^* \tag{B.3}$$

Le flux adimensionnel s'écrit

$$\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\partial \tau^*}{\partial y} \tag{B.4}$$

En adimensionnalisant de plus la diffusivité thermique par $D = D_0 D^*$, et en reportant (B.4) dans (1.68)-(1.67), l'équation de l'énergie dans la bulle

devient, en fonction de τ^*

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial t^*} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\chi}{p_g^* R^{*2}}\left(\frac{\partial \tau^*}{\partial y} - y\left.\frac{\partial \tau^*}{\partial y}\right|_{y=1}\right)\frac{\partial \tau^*}{\partial y} + D^*\frac{dp_g^*}{dt^*} + \frac{\chi D^*}{R^{*2}}\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial \tau^*}{\partial y}\right) \quad \text{(B.5)}$$

où, si l'on prend la conductivité thermique comme une fonction linéaire de la température $\lambda(T) = AT + B$, D^* s'exprime en fonction de τ^* et p_g^* par

$$D^* = \frac{\alpha T^{*^2} + (1-\alpha)T^*}{p_g^*} \quad \text{(B.6)}$$

$$T^* = \frac{1}{\alpha}\left(\alpha - 1 + \sqrt{1 + 2\alpha\frac{\gamma-1}{\gamma}\tau^*}\right) \quad \text{(B.7)}$$

avec

$$\alpha = \frac{AT_\infty}{\lambda(T_\infty)} \quad \text{(B.8)}$$

L'équation (1.69) donnant la pression gaz devient par ailleurs

$$\frac{dp_g^*}{dt^*} = \frac{3}{R^*}\left((\gamma-1)\frac{\chi}{R^*}\left.\frac{\partial \tau^*}{\partial y}\right|_{y=1} - \gamma p_g^* U^*\right) \quad \text{(B.9)}$$

Enfin les conditions aux limites (1.70) et (1.71) deviennent

$$\tau^*(y=1) = 0 \quad \text{(B.10)}$$

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \quad \text{(B.11)}$$

ce qui justifie le développement de τ^* sous la forme

$$\tau^*(y, t^*) = \sum_{k=1}^{N} a_k(t^*)\phi_k(y) \quad \text{(B.12)}$$

avec les fonctions $\phi_k = T_{2k}(y) - T_0(y)$ vérifient individuellement ces conditions aux limites.

L'équation (B.5) peut être décomposée en deux parties, l'une linéaire et l'autre non-linéaire :

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial t^*} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\chi}{p_g^* R^{*2}} \left. \frac{\partial \tau^*}{\partial y} \right|_{y=1} \underbrace{y \frac{\partial \tau^*}{\partial y}}_{L\tau^*}$$
$$+ \underbrace{\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\chi}{R^{*2}} \left[D^* \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial \tau^*}{\partial y} \right) - \frac{\gamma - 1}{\gamma p} \left(\frac{\partial \tau^*}{\partial y} \right)^2 \right] + D^* \frac{dp_g^*}{dt^*}}_{N(\tau^*)} \quad \text{(B.13)}$$

La méthode de galerkin consiste a projeter cette relation, avec τ^* écrit sous la forme (B.12) sur la base $(\Phi_1, \ldots, \Phi_N)$, soit

$$\left(\left. \frac{\partial \tau^*}{\partial t^*} \right| \Phi_k \right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\chi}{p_g^* R^{*2}} \left. \frac{\partial \tau^*}{\partial y} \right|_{y=1} (L\tau^* | \Phi_k) + (N(\tau^*) | \Phi_k) \quad \text{(B.14)}$$

Le produit scalaire envisagé ci-dessus est celui relatif aux polynômes de Chebyshev et s'écrit

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \quad \text{(B.15)}$$

La partie linéaire fait intervenir les produits scalaires $(\Phi_i | \Phi_j)$ donnés par

$$(\Phi_i | \Phi_j) = \frac{\pi}{2} \delta_{ij} + \pi \quad \text{(B.16)}$$

Remarquons que la famille de polynômes Φ_k n'est pas orthogonale et que cette matrice $(\Phi_i | \Phi_j)$ n'est donc pas diagonale.

La partie non-linéaire ne peut être exprimée simplement en fonction de ces produits scalaires et est évaluée par une formule d'intégration de Gauss-Chebychev sur $2N$ points. En tenant compte du fait que τ^* est une fonction paire, la formule peut s'écrire sur seulement N points sous la forme

$$(N(\tau^*) | \Phi_k) = 2 \sum_{j=1}^{N} w_j \Phi_k(x_j) [N(\tau^*)](x_j) \quad \text{(B.17)}$$

où les poids w_j et les points x_j sont donnés par

$$\begin{aligned} w_j &= \frac{\pi}{2N} \\ x_j &= \cos \frac{(j - 1/2)\pi}{2N} \end{aligned} \quad , j = 1 \ldots N \quad \text{(B.18)}$$

Après calcul, le système d'equations différentielles obtenu s'écrit

$$\frac{\partial p_g}{\partial t^*} = \frac{3}{R^*}\left(\frac{\gamma-1}{R^*}\chi\sum_{n=1}^{N} e_n - \gamma p_g^* U^*\right) \tag{B.19}$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = \sum_{l=1}^{N} B_{kl}\left[\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\chi}{p_g^* R^{*2}}\frac{\pi}{2}(c_l - 2c_0)\sum_{n=1}^{N} e_n + 2\sum_{n=1}^{N} w_n \Phi_l(y_n)\left[N(\tau^*)\right](y_n)\right] \tag{B.20}$$

avec

$$\left[N(\tau^*)\right](y) = \frac{\chi}{R^{*2}}\left[D^*[\tau^*(y)]\sum_{n=1}^{N} d_n T_{2n-2}(y) - \frac{\gamma-1}{\gamma p_g^*}\left(\sum_{n=1}^{N} e_n T_{2n-1}(y)\right)^2\right] + D^*[\tau^*(y)]p_g^* \tag{B.21}$$

Les coefficients e_n, c_n, b_n et g_n sont définis par

$$\begin{aligned} e_N &= 4Na_N \\ e_n &= e_{n+1} + 4na_n \qquad n = N-1\ldots 1 \end{aligned} \tag{B.22}$$

$$\begin{aligned} c_0 &= e_1/2 \\ c_n &= (e_n + e_{n+1})/2 \qquad n = 1\ldots N-1 \\ c_N &= e_N/2 \end{aligned} \tag{B.23}$$

$$\begin{aligned} b_N &= 2(2N-1)e_N \\ b_n &= b_{n+1} + 2(2n-1)e_n \qquad n = N-1\ldots 2 \\ b_1 &= b_2/2 + e_1 \end{aligned} \tag{B.24}$$

$$\begin{aligned} g_N &= 2e_N \\ g_n &= 2e_n - g_{n+1} \qquad n = N-1\ldots 2 \\ g_1 &= e_1 - g_2/2 \end{aligned} \tag{B.25}$$

$$d_n = b_n + 2g_n \qquad n = 1\ldots N \tag{B.26}$$

La matrice B_{kl} est la matrice inverse des produits $(\Phi_i|\Phi_j)$ et s'écrit explicitement

$$B_{kk} = \frac{2(2N-1)}{(2N+1)\pi} \tag{B.27}$$

$$B_{kl} = \frac{-4}{(2N+1)\pi} \quad \text{pour } k \neq l \tag{B.28}$$

Les deux équations (B.19-B.20) couplées au système (1.89)-(1.90) fournissent un système d'équations différentielles sous la forme (1.102).

Annexe C

Forces hydrodynamiques exercées sur une particule.

C.1 Décomposition générale

Considérons une particule de masse m_p se déplaçant avec une vitesse $\mathbf{v}$ dans un écoulement de fluide dont le champ de vitesse serait $\mathbf{u}$ en l'absence de la particule. Les forces exercées sur la particules sont

- son poids $m_p\mathbf{g}$.
- la résultante des forces hydrodynamiques sur la surface de la particule S_p

$$\mathbf{f} = \iint_{S_p} \mathbf{\Sigma}.\mathbf{n}\, dS$$

On peut arbitrairement décomposer le tenseur des contraintes $\mathbf{\Sigma}$ en une partie $\mathbf{\Sigma_F}$ correspondant à l'écoulement qui existerait si la particule était remplacée par du fluide, et une partie $\mathbf{\Sigma_P}$ correspondant à l'ensemble des perturbations induites par la présence de la particule. On note $\mathbf{F_F}$ et $\mathbf{F_P}$ les forces hydrodynamiques sur la particule correspondantes. L'équation du mouvement du liquide en l'absence de la particule s'écrit :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{\Sigma_F} + \rho \mathbf{g} \tag{C.1}$$

et la force $\mathbf{F_F}$ peut donc s'écrire

$$\mathbf{F_F} = \iint_{S_p} \mathbf{\Sigma_F}.\mathbf{n}\, dS = \iiint_{V_p} \operatorname{div} \mathbf{\Sigma_F}\, dV = \iiint_{V_p} \rho \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{g} \right)\, dV$$

On peut supposer l'intégrande constant si l'écoulement est homogène à l'échelle de la particule [1], soit

$$\mathbf{F_F} = \rho V \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{g} \right) \tag{C.2}$$

et l'équation de la dynamique pour la particule s'écrit finalement

$$m_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m_p \mathbf{g} + \rho V \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{g} \right) + \mathbf{F_P} \tag{C.3}$$

On notera que le terme $-\rho V \mathbf{g}$ n'est autre que la poussée d'Archimède.

Nous détaillons maintenant les différentes forces intervenant dans $\mathbf{F}_P$.

C.2 Force de masse ajoutée

Tout d'abord, si la bulle accélère par rapport au fluide, elle doit accélérer le fluide qui se trouve autour d'elle. Le fluide exerce donc une force supplémentaire $\mathbf{F_M}$ sur la bulle, proportionnelle à l'accélération relative de la bulle et du fluide. Le coefficient de proportionnalité est appelé coefficient de masse virtuelle et dépend de la forme du corps. Pour une sphère, cette masse virtuelle vaut la moitié de la masse du liquide déplacé, et la force correspondante dite de masse ajoutée s'écrit dans un écoulement uniforme Landau and Lifschitz (1971) :

$$\mathbf{F_M} = \frac{1}{2} \rho V \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) \tag{C.4}$$

Ce résultat, établi initialement dans le cas d'un écoulement potentiel, se généralise aux écoulements visqueux quel que soit le nombre de Reynolds, ainsi qu'à des écoulements non uniformes Magnaudet (1997), ceci quel que soit le type de la particule. Dans le cas d'un écoulement non-uniforme, la dérivée partielle $d\mathbf{u}/dt$ doit être remplacée par une dérivée convective :

$$\mathbf{F_M} = \frac{1}{2} \rho V \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) \tag{C.5}$$

Legendre et al. (1998); Magnaudet and Legendre (1998) ont de plus montré récemment par simulation numérique que dans le cas d'une bulle de rayon variable, l'expression de la force de masse ajoutée devient

$$\mathbf{F_M} = \frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} V (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \tag{C.6}$$

1. Si ce n'est pas le cas, dans l'équation suivante l'expression $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ doit être considéré comme une moyenne sur le volume de la particule, éventuellement complété par des termes en $\nabla^2 \mathbf{u}$ appelés termes de Faxén.

C.3 Force de traînée visqueuse

L'expression de la traînée visqueuse $\mathbf{F_V}$ sur un corps en mouvement dans un liquide infini dépend essentiellement de la nature de ce corps et du nombre de Reynolds de l'écoulement. La nature du corps influe sur la condition aux limites à appliquer à la surface de ce dernier : dans la cas d'un solide, on applique une condition de non-glissement (vitesse normale et tangentielle nulles) alors que dans la cas d'une bulle, le glissement est autorisé à la surface de la bulle et la vitesse tangentielle est non-nulle.

Le cas d'une sphère solide indéformable dans un écoulement stationnaire de faible Reynolds est désormais un problème classique. Le résultat s'exprime par la formule de Stokes Landau and Lifschitz (1971)

$$\mathbf{F_V}_{\text{solide } Re \ll 1} = -6\pi R\mu(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \tag{C.7}$$

Dans le cas d'une bulle indéformable à faible Reynolds, cette formule devient

$$\mathbf{F_V}_{\text{bulle } Re \ll 1} = -4\pi R\mu(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \tag{C.8}$$

Dans la limite inverse des nombres de Reynolds élevés, l'écoulement peut être considéré comme potentiel, la couche limite et le sillage ayant des épaisseurs très fines. Levich (1962) obtient alors

$$\mathbf{F_V}_{\text{bulle } Re \gg 1} = -12\pi R\mu(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \tag{C.9}$$

Pour des nombres de Reynolds finis, Moore (1963) a calculé des corrections à cette formule tenant compte du sillage et de la couche limite.

L'expression de la traînée visqueuse exercée sur une bulle entraînée par la force de Bjerknes varie selon les auteurs. Zwick (1958) utilise (C.8), Crum and Eller (1970) utilisent la traînée sur une particule solide (C.7) assortie d'une correction empirique fonction du nombre de Reynolds. A ce sujet, il convient de noter que dans le cas d'une bulle, le glissement à la paroi ne peut être considéré non nul que si le liquide n'est pas contaminé par des surfactants. Dans le cas inverse, la bulle peut se comporter plutôt comme un solide, au sens où la couche de surfactant adsorbée à la surface de la bulle impose éventuellement une condition de vitesse tangentielle nulle.

Par ailleurs, les expressions précédentes sont valables pour des bulles de rayon constant, et l'extension à une bulle oscillante n'est pas immédiate. Récemment Magnaudet and Legendre (1998); Legendre et al. (1998) ont montré par un calcul analytique et par simulation numérique directe que l'extension

des expressions précédentes dépendaient à la fois du Reynolds et du produit Re C_r où C_r est le rapport de la vitesse radiale dR/dt et de la vitesse du liquide $\mathbf{u}$:

- Dans le cas où Re $\gg 1$, on retrouve le résultat (C.9), où rayon et vitesse sont maintenant des valeurs instantanées. Le point remarquable est que ce résultat reste valable à Reynolds faible, pourvu que Re $C_r \gg 1$.
- Dans le cas où Re $\ll 1$ *et* Re $C_r \ll 1$, la force totale exercée sur la bulle est la somme de (C.8) et d'un terme de mémoire intégral. Ce dernier fait intervenir la dérivée du produit $R(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, non nul dès lors que le rayon de la bulle dépend du temps.

Au vu des ordres de grandeurs calculés dans la section 5.3.5, il semble que pour une bulle mise en mouvement par la force de Bjerknes, l'hypothèse Re $C_r \gg 1$ soit toujours réalisée, sauf pour des bulles très petites, et que l'expression correcte de la traînée visqueuse soit (C.9). Notons malgré tout que le résultats cités ci-dessus ont été obtenus pour une bulle de vapeur dont le rayon évolue de façon monotone au cours du temps, et rien n'indique qu'ils restent valables pour des bulles en oscillation rapide. La contamination du liquide invaliderait de toutes façons le résultat ci-dessus.

Annexe D

Harmoniques sphériques.

Une étude extensive de ces fonctions peut être trouvée dans Morse and Feshbach (1953). Les harmoniques sphériques Y_n^mforment une base de fonctions orthogonales engendrant toutes les fonctions $f(\theta, \phi)$ définies sur la surface d'une sphère, soit

$$f(\theta, \phi) = y_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} f_{nm} Y_n^m(\theta, \phi) \tag{D.1}$$

Ces fonctions Y_n^m peuvent être définies par

$$Y_n^0(\theta, \phi) = P_n^0(\cos\theta) \tag{D.2}$$
$$Y_n^m(\theta, \phi) = \cos(m\phi) P_n^m(\cos\theta) \tag{D.3}$$
$$Y_n^{-m}(\theta, \phi) = \sin(m\phi) P_n^m(\cos\theta) \tag{D.4}$$

où les fonctions P_n^m sont les fonctions de Legendre définies à partir des polynômes de Legendre P_n par

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \tag{D.5}$$

Les harmoniques sphériques Y_n^0 ne dépendent pas de ϕ et représentent donc des grandeurs axisymétriques. Elles sont appelées harmoniques sphériques «zonales». Elle définissent des oscillations suivant les méridiens et s'expriment simplement sous la forme

$$Y_n^0(\theta) = P_n(\cos\theta) \tag{D.6}$$

Ces fonctions sont les seules qui interviennent dans des problèmes à symétrie axiale.

Les harmoniques $Y_n^{\pm n}$ sont symétriques par rapport au plan $z = 0$, et invariantes par rotation d'angle π/m. Elles sont appelées harmoniques sphériques «sectorales». Elles définissent des oscillations le long des parallèles.

Les autres fonctions définissent des oscillations à la fois sur θ et sur ϕ. Notons que l'on passe de Y_n^m à Y_n^{-m} par une rotation sur ϕ de $\pi/2m$.

Une propriété importante est que si une fonction s'exprime uniquement en fonction d'harmoniques d'ordre n fixé dans un repère $(theta, \phi)$, cela est toujours vrai dans un autre repère (θ', ϕ').

Ces fonctions jouent un rôle crucial dans la résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques : toute solution $F(r, \theta, \phi)$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des fonctions :

$$r^n Y_n^{\pm m} \qquad \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^{\pm m} \tag{D.7}$$

C'est cette décomposition du potentiel des vitesses qui permet de conduire à l'équation (5.100).

Table des figures

1.1 Illustration du seuil de Blake : rayon d'équilibre d'une bulle en fonction de la pression dans le liquide environnant ($R_0 = 10^{-6}$, $\sigma/p_0R_0 = 0.67$). La courbe en trait plein est une branche stable et la courbe en pointillé est une branche instable apparaissant pour $p_a > p_0$. Les deux branches se rejoignent au seuil de Blake. 8

1.2 Illustration de la cavitation instable (simulation numérique). En traits pleins : rayon de la bulle adimensionnel R/R_0. En traits pointillés : amplitude de la perturbation acoustique $(p_a - p_0)/p_0$. La dépression acoustique entraîne une explosion de la bulle, suivie d'une implosion sur un temps très court. Le rayon minimum atteint est très faible. 10

1.3 Bulle seule en oscillation radiale dans un liquide infini. 11

1.4 Oscillations non-linéaires d'une bulle pour un rapport $f/f_0 \simeq 2/5$. Les trois représentations graphiques montrent clairement que la plus petite l'apparition d'une composante à la fréquence $f/2$. 27

1.5 D'après Lauterborn (1976) : Amplitude d'oscillation d'une bulle de $10\mu m$. Chaque courbe correspond à une pression acoustique différente : a. $p_a/p_0 = 0.4$, b. $p_a/p_0 = 0.5$, c. $p_a/p_0 = 0.6$, d. $p_a/p_0 = 0.7$, e. $p_a/p_0 = 0.8$. Les labels au dessus des pics indiquent l'ordre des accrochages. 28

1.6 Phénomène d'hystérésis dans les résonances non-linéaires. . . . 29

1.7 Deux plans de phase correspondant à des régimes permanents de chaque coté du pic de résonance 1/1. 30

1.8 Résonance non linéaire 4/1. $R_0 = 10\ \mu m$, $f/f0 = 0.252$, $p_a/p_0 = 0.8$ 31

1.9 Résonance non-linéaire 4/1 après bifurcation sous-harmonique. $R_0 = 10\ \mu m$, $f/f0 = 0.252$, $p_a/p_0 = 0.821$ 32

1.10 D'après Parlitz et al. (1990) : Diagrammes de bifurcation pour une bulle de 10 μm pour trois amplitudes d'excitation différentes. En abscisse fréquence acoustique en kHz ; en ordonnée, amplitude de l'oscillation de la bulle échantillonnée à la fréquence acoustique. 35

1.11 Profil de température approximatif dans la bulle et dans le liquide lors de la compression. 37

1.12 Simulation numérique des effets thermiques dans la bulle pour une bulle de 10 μm. Le rapport f/f_0 est environ 0.8. A gauche de haut en bas : rayon et pression au cours du temps sur un cycle d'oscillation, et diagramme pression-volume de la bulle. A droite, zoom sur le point de compression maximale : la pression est en avance de phase sur le volume. Les deux courbes du bas représentent les profils de vitesse et de température dans la bulle a. au point de pression maximale b. au point de rayon minimal. 43

1.13 Variation de l'exposant polytropique d'une bulle d'air de 1, 10, 100 μm, et 1 mm avec la fréquence acoustique. 48

1.14 Variation du coefficient d'amortissement en fonction de la fréquence pour une bulle d'air de 10 et 100 μm. Les trois courbes en pointillés représentent les trois contributions visqueuse, thermique et acoustique, et la courbe en traits pleins représente l'amortissement total. 49

1.15 Représentation graphique d'une implosion. La courbe en trait plein est représente p_R. Les aires hachurées correspondent à l'énergie cinétique maximale. A gauche cavitation stable : l'énergie cinétique maximale du liquide n'est pas trop élevée et sera aisément compensée par une compression faible de la bulle. A droite : cavitation instable. La pression dans la bulle était très faible au départ, et l'énergie cinétique du liquide est si élevée que la bulle devra atteindre un rayon quasi-nul pour arrêter le mouvement. 56

2.1 Définition des différentes échelles intervenant dans le moyennage volumique. La macro-échelle est celle qui intéresse l'observateur et correspond aux variations des grandeurs moyennées. L'échelle microscopique correspond à la taille des particules. La méso-échelle doit être suffisamment grande pour contenir un grand nombre de particules, et suffisamment petite pour que du point de vue de l'observateur, les grandeurs macroscopiques y subissent une variation négligeable. 62

2.2 Décomposition de l'ensemble des configurations $\mathcal{C}_M$ intervenant dans la moyenne (2.4) en sous-ensembles incluant 0, 1, 2 etc... particules au voisinage du point $\mathbf{x}$. 64

2.3 Diffraction d'une onde plane par une bulle sphérique. 66

2.4 Définition intuitive de grandeurs moyennes sur un méso-volume. 69

2.5 Cas d'étude pour montrer que la vitesse est d'ordre β. 73

2.6 Représentation graphique de la relation de dispersion. 82

2.7 Géométrie étudiée : on suppose que la taille de la source et celle du tube sont égales afin d'engendrer une onde plane. Les bulles sont supposées déjà formées, uniformément réparties et toutes de même rayon d'équilibre. 83

2.8 Influence du réflecteur sur le profil d'onde stationnaire : ($L = 1$, $p_a\sqrt{2} = 1$, $\lambda = 0.7$). La grandeur représentée est p. A gauche, réflecteur parfait $\psi_r = 0$, à droite $\psi_r = 0.3$. De haut en bas, $\psi_i = 0$, $\pi/2$, $\pi/4$. Les courbes en traits pleins représentent l'enveloppe, la courbe en pointillés épais l'allure du profil en $\omega t = 2\pi/3$ et la courbe en pointillés fins en $\omega t = \pi/2$. 87

2.9 Ondes stationnaires atténuées ($L = 1$, $p_a\sqrt{2} = 1$, $\lambda = 0.7$). La grandeur représentée est p. Les courbes en traits pleins représentent l'enveloppe, la courbe en pointillés épais l'allure du profil en $\omega t = \pi$ et la courbe en pointillés fins en $\omega t = \pi/2$. A gauche, réflecteur parfait type paroi rigide ($\psi_i = 0$), à droite réflecteur parfait type surface libre ($\psi_i = \pi/2$). De haut en bas, $\mathrm{Im}\, k = \mathrm{Re}\, k/10$, $\mathrm{Re}\, k/5$, $\mathrm{Re}\, k/2$. 88

2.10 D'après Silberman (1957) : dispositif expérimental de mesure de la vitesse de phase et de l'atténuation dans un liquide à bulles. 91

2.11 D'après Commander and Prosperetti (1989) : à gauche vitesse de phase ; à droite atténuation. Les points correspondent aux données expérimentales de Silberman (1957) : triangles : $R_0 = 3.64$ mm ; cercles : $R_0 = 2.68$ mm ; losanges : $R_0 = 2.60$ mm. Les courbes en traits pleins correspondent à la relation de dispersion (2.49) calculée pour $R_0 = 2.68$ mm, et celle en traits pointillés pour $R_0 = 3.41$ mm. Le taux de gaz vaut 1 %. 92

2.12 Courbes caractéristiques de l'équation (2.74) avec une source sinusoïdale commençant par une phase de dépression. Les courbes en gras correspondent à $p = p_0$, $dx/dt = c(p_0)$. Les deux lignes en pointillé correspondent aux vitesses de propagation maximale et minimale. 96

2.13 Mécanisme de raidissement d'une onde sinusoïdale : la partie compressive de l'onde se propage plus vite. 97

2.14 D'après Noordzij and van Wijngaarden (1972) : profils de chocs mesurés dans un tube à chocs rempli d'un liquide à bulles. De gauche à droite : profils observés en des points de plus en plus lointains de l'initiation du choc. Le choc oscillatoire initialement formé «relaxe» progressivement vers un profil monotone très peu raide. 106

2.15 Portraits de phase des solutions stationnaires de l'équation de KdVB pour $m < 1$ et pour $m > 1$. 109

2.16 D'après Sangani and Sureshkumar (1993). A gauche : modélisation d'un rideau de bulles par un empilement de cellules périodiques. A droite, comparaison de l'atténuation : en ronds blancs, mesurée par Silberman ; en ronds noirs : calculés par simulation directe ; en traits pleins, prédite par la théorie en $O(\beta_0^{3/2})$; en traits pointillés, prédits par la théorie en $O(\beta_0)$. Les données sont $R_0 = 2.60$ mm et $\beta_0 = 1\%$. 113

3.1 Frontière du volume V. Le potentiel est imposé sur A_ϕ et la vitesse normale sur A_u 121

3.2 Définition des fonctions polynômiales par morceaux N_j en 1D avec des polynômes de degré 1. 123

3.3 Définition des fonctions polynômiales par morceaux N_j en 2D pour un maillage triangulaire avec des polynômes de degré 2. . 124

4.1 Propagation de l'onde pendant les premières périodes acoustiques. $L = 6.17$ cm et $p_a^* = 0.2$. Le profil est représenté aux instants $ft = 0.78125$ (traits noirs), $ft = 1.5625$ (traits pointillés), et $ft = 2.34375$ (traits gris). 132

4.2 Courbes caractéristiques pour l'onde de la figure 4.1 : ce sont des droites dont la pente est inversement proportionnelle à la pression. 133

4.3 Evolution d'une onde progressive pour différentes amplitudes de la source dans les conditions de la figure 4.1. Les profils sont visualisés au bout de 5 périodes de la source. La longueur du domaine est 12 cm. Les courbes en gris représentent les ondes prédites par la théorie linéaire. 135

4.4 Evolution du choc pour $p_a^* = 0.2$. Le paramètre m défini par (4.5) vaut approximativement 0.18. 137

4.5 Tracé des profils d'onde de la figure 4.4 dans le repère se déplaçant à la vitesse U, en 64 instants dans l'intervalle $3 < ft < 4$. Les profils sont indiscernables. 138

4.6 En traits plein : portrait de phase correspondant au dernier profil de la figure 4.5, solution du modèle de Caflish. En traits pointillés : orbite hétérocline de l'équation (2.116), correspondant à une solution stationnaire de l'équation de KdVB. L'amplitude de la source est $p_a^* = 0.2$. 139

4.7 Comparaison des orbites obtenues numériquement pour différentes fréquences de la source $f = 20$, 60, ou 120 kHz (amplitude $p_a^* = 0.2$). Le résultat montre clairement que la forme du choc est indépendante de la fréquence. 140

4.8 Comparaison des orbites obtenues numériquement pour des taux de gaz $\beta_0 = 5.10^{-5}, 5.10^{-4}$ et 5.10^{-3} (amplitude $p_a^* = 0.2$). Le résultat confirme l'invariance de la forme du choc par rapport au taux de gaz. 141

4.9 Comparaison des orbites des chocs obtenus numériquement par le modèle de Caflish (en traits pleins) avec la solution de l'équation de KdVB (en traits pointillés). Sur la figure du haut $p_a^* = 0.5$ et sur celle du bas $p_a^* = 0.7$. L'approximation n'est plus valable quantitativement. 142

4.10 Comparaison du rayon le long du choc obtenu numériquement (en traits pleins) et calculé par l'expression (2.92) (en traits pointillés). 143

4.11 Simulation effectuée avec un terme de dissipation nul. L'équation équivalente est une équation de Korteweg-de Vries, qui prédit la transformation du pulse en un train de solitons. $L = 25$ cm et $p_a^* = 0.3$ 143

4.12 Conversion du problème de signalement en problème de valeur initiale. On voit que la démarche est valide si le profil ne se déforme pas trop sur une distance adimensionnelle de π, de telle sorte que les caractéristiques restent quasiment parallèles. Par ailleurs on voit que les fonctions cos et sech^2 peuvent être sensiblement confondues. 145

4.13 Vitesse de phase et atténuation pour une bulle de 10 μm avec un taux de gaz $\beta_0 = 5.10^{-4}$. Les lignes notées f et f_0 correspondent à la fréquence d'excitation considérée ici et à la fréquence de résonance de la bulle. 148

4.14 En traits noirs : enveloppe de l'onde stationnaire pour $p_a^* = 10^{-3}$: le profil est quasiment indiscernable du profil obtenu par la théorie linéaire (en traits fins). 149

4.15 Pression et rayon en fonction du temps à l'abscisse notée «a» sur la figure 4.14 ($p_a^* = 10^{-3}$). Le seul harmonique présent est l'harmonique 1. 150

4.16 Enveloppe de l'onde stationnaire pour $p_a^* = 5.10^{-2}$: on constate une distorsion notable de l'enveloppe. 150

4.17 Pression et rayon en fonction du temps à l'abscisse notée «a» sur la figure 4.16 ($p_a^* = 5.10^{-2}$) 151

4.18 Pression et rayon en fonction du temps à l'abscisse notée «b» sur la figure 4.16 ($p_a^* = 5.10^{-2}$) 152

4.19 Amplitude des harmoniques 1 et 2 de la pression en fonction de x ($p_a^* = 5.10^{-2}$). 152

4.20 Enveloppe de l'onde stationnaire pour $p_a^* = 0.1$. 154

4.21 Pression et rayon en fonction du temps à l'abscisse notée «a» sur la figure 4.20 ($p_a^* = 0.1$). 154

4.22 Pression et rayon en fonction du temps à l'abscisse notée «b» sur la figure 4.20 ($p_a^* = 0.1$). 155

4.23 Amplitude des harmoniques 1, 2, 3 et 4 de la pression en fonction de x ($p_a^* = 0.1$). 155

4.24 Enveloppe de l'onde stationnaire pour $p_a^* = 0.2$. 156

4.25 Pression et rayon en fonction du temps à l'abscisse notée «a» sur la figure 4.24 ($p_a^* = 0.2$). 156

4.26 Evolution du profil au cours du temps pour un pulse sinusoïdal. Les labels sur les courbes indiquent le temps adimensionnel ft. L'amplitude de la source est $p_a^* = 0.5$. 157

4.27 Réflexion du profil sur une paroi rigide. Les labels sur les courbes indiquent le temps adimensionnel ft. L'amplitude de la source est $p_a^* = 0.5$. 158

4.28 Comparaison du profil réfléchi à $ft = 8$ (en traits pleins) avec le profil obtenu sans réflexion (en traits pointillés) au même instant. 159

4.29 Comparaison du pulse réfléchi après croisement avec un deuxième pulse incident (en traits pleins), avec le pulse réfléchi non perturbé (en traits pointillés). 160

4.30 Mise en évidence de l'apériodicité liée au déphasage engendré par les réflexions en $x = L$ et les croisements d'ondes. 161

4.31 Caractéristiques $p = C^{\text{te}}$ obtenues pour un régime périodique (à gauche) et un régime apériodique (à droite). Les lignes les plus foncées correspondent aux hautes pressions. 162

4.32 Vitesse de phase et atténuation pour une bulle de 10 μm avec un taux de gaz $\beta_0 = 5.10^{-4}$. La ligne notée f correspond à $f/f_0 \simeq 0.44$. 164

4.33 Amplitude maximale des oscillations d'une bulle en fonction de la fréquence. A gauche, avec un modèle polytropique et une viscosité thermique ajoutée, à droite avec un modèle thermique complet. Les labels sur les courbes indiquent l'amplitude adimensionnelle p_a^* de la pression acoustique. 165

4.34 Points de fonctionnement choisis pour les simulations à $p_a^* = 0.7$. Les points sur les courbes montrent les amplitudes d'oscillations de bulle prédites par les modèles polytropique et thermique. 167

4.35 Enveloppe de l'onde obtenue pour la simulation P1. 167

4.36 Evolution temporelle de la pression et du rayon au point noté «a» sur la figure 4.35. 168

4.37 Amplitude de plusieurs harmoniques de $p^*(x,t)$ en fonction de x. La figure du haut montre que la longueur du domaine correspond au quart de la longueur d'onde associée à l'harmonique $f/23$. Les deux autres harmoniques correspondent aux raies latérales de chaque coté de l'harmonique 1 engendrées par des interactions non-linéaires entre f et $f/23$. Sur la figure du bas sont présentées les harmoniques f $2f$ et $3f$ pour comparaison. 170

4.38 Puissance volumique dissipée en fonction de la longueur : en traits pleins, obtenue numériquement pour la simulation P1, en traits pointillés, prédite par la théorie linéaire. La figure du bas est un zoom sur celle du haut. 173

4.39 Puissance volumique dissipée en fonction de la longueur pour les 4 simulations P1, P2, T1, T2 (zoom). 174

4.40 Amplitude maximale des oscillations d'une bulle de 10 μm excitée à la fréquence $f/f_0 = 0.445$, en fonction de l'amplitude de la pression acoustique, prédite par le modèle thermique. . . 175

4.41 Evolution temporelle du rayon de chaque coté de la discontinuité de la figure 4.39 pour la simulation T2. 175

5.1 Effet de surface dans la diffusion rectifiée 184

5.2 Effet de couche dans la diffusion rectifiée 185

5.3 Seuil de diffusion rectifiée en fonction du rayon d'après l'expression (5.22). 190

5.4 Vitesse de croissance d'une bulle en fonction de son rayon pour différentes pressions acoustiques ($f = 20$ kHz). Les labels sur chaque courbe indiquent les valeurs de P/p_0. 191

5.5 D'après Crum (1980). A gauche : comparaison du seuil de diffusion rectifiée (5.22) (en traits pleins) avec les résultats expérimentaux. A droite : comparaison du taux de croissance (5.12) avec les résultats expérimentaux. La fréquence est 22.1 kHz et le rayon de la bulle pour la mesure du taux de croissance est 45 μm. 192

5.6 En traits pleins : $|P(x)|$ défini par (5.30) ($\phi = 0$). En traits pointillés : force de Bjerknes sur une bulle de taille inférieure au rayon de résonance ($\mathrm{Re}\,\alpha > 0$). Les flèches indiquent le sens et l'amplitude de la force. Le point x_m est le point où la force de Bjerknes est maximale (et positive). 197

5.7 Principe de la lévitation d'une bulle : la surface libre est en $x = 0$ et le premier ventre de pression est situé en $x = \lambda/4$; la courbe en traits pleins représente la force totale (Bjerknes + poussée d'Archimède) exercée sur la bulle. La courbe en pointillés rappelle l'enveloppe du champ d'ondes stationnaire. La force totale est nulle aux points x_1 et x_2, le premier étant instable, l'autre stable. Une bulle de taille inférieure à la taille de résonance injectée entre x_1 et x_2 se stabilisera en x_2. $\lambda =$ 7.5cm, $f =$ 20kHz 199

5.8 Vitesse de la bulle en fonction du temps. La force de Bjerknes est calculée d'après (5.31) au point où elle est maximale, avec $\lambda = 7.5$ cm, $f = 20$ kHz, $p_m = 0.2$, $R_0 = 50$ μm. 202

5.9 Illustration de la vitesse instantanée $\mathbf{v}$ de la bulle par rapport à son rayon et à la vitesse du fluide $\mathbf{u}$. La bulle est placée au point x_m de la figure 5.6. 203

5.10 **a** Vitesse moyenne finale d'une bulle dans une onde stationnaire d'amplitude p_m en fonction de son rayon d'équilibre. **b** Nombre de Reynolds correspondant. **c** Produit Re.C_r. $\lambda =$ 7.5cm, $f =$ 20kHz 209

5.11 Grandeur $\frac{4\tau\langle v_\infty\rangle}{\lambda/10}$ en fonction de R_0 pour les trois amplitudes $p_m = 0.2$, 0.4 et 0.8 bars, dans les mêmes conditions que la figure 5.10 210

5.12 Forces de Bjerknes de deuxième espèce : l'accélération radiale du fluide engendrée par les oscillations de la bulle 2 induit une force sur la bulle 1. 212

5.13 Trajectoire du mouvement relatif des deux bulles. la trajectoire en pointillés correspond à la limite de collision. σ est la section de collision et b le paramètre d'impact. 219

5.14 Stabilité de l'équation de Mathieu Bender and Orszag (1978). Le domaine hachuré représente les zones instables, le domaine en blanc les zones stables. 231

5.15 D'après Eller and Crum (1970) : en traits pleins : seuil d'instabilité de surface calculé d'après l'étude de stabilité de l'équation (5.108). Les auteurs comparent ce seuil à celui calculé par l'équation de Mathieu et celui de Hsieh and Plesset (1961). . . 233

5.16 Seuil d'accrochage sous-harmonique prédit par l'équation de Mathieu pour des bulles autour de la taille de résonance. Les labels pour chaque domaine indiquent l'ordre n du mode excité. 236

5.17 Déformation d'une bulle entreprenant des oscillations de surface dans le mode Y_6^m, pour $m = 0 \ldots 6$. Le mode Y_6^0 correspond à une déformation axisymétriques. 238

5.18 Illustration de l'équation de conservation du nombre de bulles. Les flèches parallèles à l'axe x symbolisent la migration sous l'influence des forces de Bjerknes, celles parallèles à l'axe R_0 représentent la dissolution ou la diffusion rectifiée, et les deux autres, les bulles de rayon R_0 apparaissant ou disparaissant par coalescence, fragmentation stable et instable. 240

6.1 D'après Neppiras (1980) : superposition des seuils de diffusion rectifiée et de Blake à 20 kHz. 247

6.2 Superposition des seuils de diffusion rectifiée, de Blake et d'apparition d'instabilités de surface. 248

6.3 Décomposition du milieu en trois régions : la zone de cavitation forte s'étend de la source au point x_f où la pression acoustique est égale à p_0 ; la zone de cavitation stable s'étend de x_f au point x_s correspondant au minimum du seuil de diffusion rectifiée ; enfin la dernière zone, au-delà de x_s est une région sans bulles. 250

6.4 Zone de cavitation forte, comprise entre la source et le point où la pression acoustique vaut 1 atm. Les seuils de Blake se coupent en un point de pression P_c très proche de 1 atm. . . . 251

6.5 Evolution des bulles dans la zone $x < x_c$ de la figure 6.4. Les bulles dans la zone E se fragmentent, engendrant des bulles dans la zone D qui se dissolvent. 252

6.6 Zone de cavitation stable. 253

6.7 Représentation du champ défini par $(dR_0/dt, dP/dt)$. En trait pointillé : seuil de Blake. En trait plein : seuil de diffusion rectifiée. En trait gris : trajectoire d'une bulle de rayon initial 10 μm partant de $x = 7.4$ cm. 256

6.8 Zoom sur la figure 6.7. 257

6.9 Schéma de transfert de gaz dans le liquide : les bulles migrant sous l'influence des forces de Bjerknes transportent du gaz vers la source acoustique. Après plusieurs cycle de fragmentation-diffusion rectifiée, les micro-bulles produites se dissolvent dans le liquide. Le gradient de concentration en gaz dissout provoque un transfert depuis la source vers le lieu d'où viennent les bulles. 258

6.10 Mécanisme possible de renucléation du gaz dissous. 259

6.11 Exemple de seuil de diffusion rectifiée exhibant un minimum local : une pression acoustique P comprise entre P_1 et P_2 coupe ce seuil en trois points I_1, S et I_2. Le point S correspond à une taille de bulle stable à la pression P. 262

6.12 D'après Akhatov et al. (1997) : seuil de diffusion rectifiée calculé numériquement à une fréquence de 20 kHz. Dans la zone grisée, les bulles grossissent, et dans la zone blanche elles se dissolvent. Le seuil présente un minimum local, de telle sorte que toutes les bulles sur la branche de droite sont stables par rapport au phénomène de dissolution/croissance. 263

6.13 Illustration de la transition entre un régime d'onde stationnaire et l'effet d'écran. 267

Bibliographie

M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions.* National Bureau of Standards, New-York, 1964.

I. Akhatov, N. Gumerov, C. D. Ohl, U. Parlitz, and W. Lauterborn. The role of surface tension in stable single bubble sonoluminescence. *Phys. Rev. Lett.*, 78(2) :227–230, 1997.

V. N. Alekseev and V. P. Yushin. Distribution of bubbles in acoustic cavitation. *Sov. Phys. Acoust.*, 32(6) :469–472, 1986.

R. E. Apfel. Acoustic cavitation prediction. *J. Acoust. Soc. Am.*, 69(6) : 1624–1633, 1981.

B. P. Barber, R. A. Hiller, R. Löfstedt, S. J. Putterman, and K. R. Weninger. Defining the unknowns of sonoluminescence. *Phys. Rep.*, 281 :65–143, 1997.

G. K. Batchelor. The stress system in a suspension of force-free particles. *J. Fluid Mech.*, 41 :545–570, 1970.

G. K. Batchelor. Sedimentation in a dilute dispersion of spheres. *J. Fluid Mech.*, 52 :245–268, 1972.

G. K. Batchelor and J. T. Green. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2. *J. Fluid Mech.*, 56 :401–427, 1972.

C. M. Bender and S. A. Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers.* McGraw-Hill, 1978.

T. B. Benjamin. Discussion on van wijngaarden. In 6th *Symposium on Naval Hydrodynamics*, pages 129–134, Washington DC, 1966. Office of Naval Research.

T. B. Benjamin and A. T. Ellis. Self-propulsion of asymmetrically vibrating bubbles. *J. Fluid Mech.*, 212(2) :65–80, 1990.

Y. A. Berezin and V. I. Karpman. *JETP Lett.*, 51 :1557, 1966.

P. Bergé, Y. Pomeau, and Ch. Vidal. *L'ordre dans le chaos.* Hermann, Paris, 1984.

A. Biesheuvel and L. Van Wijngaarden. Two-phase flow equations for a dilute dispersion of gas bubbles in liquid. *J. Fluid Mech.*, 148 :301–318, 1984.

F. G. Blake. Bjerknes forces in stationary sound fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 21(5) :551, 1949a.

F. G. Blake. The onset of cavitation in liquid. *Harvard Univ. Acoust. Res. Lab. Tech. Mem.*, (12), 1949b.

J. A. Bouré and Y. Mercadier. Existence and properties of flow structure waves in two-phase bubbly flows. *Appl. Sci. Res.*, 38 :297–303, 1982.

Jr. C. Devin. Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water. *J. Acoust. Soc. Am.*, 31(12) :1654–1667, 1959.

R. E. Caflish, M. J. Miksis, G. C. Papanicolaou, and L. Ting. Effective equations for wave propagation in bubbly liquids. *J. Fluid Mech.*, 153 : 259–273, 1985.

E. L. Carstensen and L. L. Foldy. Propagation of sound through a liquid containing bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 19(3) :481–501, 1947.

R. B. Chapman and M. S. Plesset. Nonlinear effects in the collapse phase of a nearly spherical cavity in a liquid. *J. Basic Eng.*, 94 :142–146, 1972.

L. Y. Cheng, D. A. Drew, and R. T. Lahey. An analysis of wave propagation in bubbly two-component, two-phase flow. *Transactions of the ASME*, 107 :402–408, 1985.

C. C. Church. Prediction of rectified diffusion during nonlinear bubble pulsations at biomedical frequencies. *J. Acoust. Soc. Am.*, 83(6) :2210–2217, 1988.

R.H. Cole. *Underwater explosions.* Princeton University Press, 1948.

K. W. Commander and A. Prosperetti. Linear pressure waves in bubbly liquids : comparison between theory and experiments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(2) :732–746, 1989.

E. Cramer and W. Lauterborn. Acoustic cavitation noise spectra. *Appl. Sci. Res.*, 38 :209–214, 1982.

L. A. Crum. Bjerknes forces on bubbles in a stationary sound field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 57(6) :1363–1370, 1975.

L. A. Crum. Measurements of the growth of air bubbles by rectified diffusion. *J. Acoust. Soc. Am.*, 68(1) :203–211, 1980.

L. A. Crum. The polytropic exponent of gas contained within air bubbles pulsating in a liquid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 73(1) :116–120, 1983.

L. A. Crum and A. I. Eller. Motion of bubbles in a stationnary sound field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 48(1) :181–189, 1970.

L. A. Crum and G. M. Hansen. Generalized equations for rectified diffusion. *J. Acoust. Soc. Am.*, 72(5) :1586–1592, 1982.

L. A. Crum and A. Prosperetti. Nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids : an interpretation of some experimental results. *J. Acoust. Soc. Am.*, 73(1) :121–127, 1983.

L. A. Crum and A. Prosperetti. Erratum and comments on "nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids : An interpretation of some experimental results". *J. Acoust. Soc. Am. - Letters to the Editor*, 75(6) :1910–1912, 1984.

J. N. Decarpigny. *Application de la méthode des éléments finis à l'étude de transducteurs piezoélectriques.* Thèse de doctorat, Université des sciences et techniques de Lille, 1984.

A. A. Doinikov and S. T. Zavtrak. Allowance for compressibility of the liquid in the problem of the interaction of gas bubbles in a sound field. *Sov. Phys. Acoust.*, 34(2) :144–147, 1988.

A. A. Doinikov and S. T. Zavtrak. Radiation effects of the interaction of two gas bubbles in a compressible nonideal liquid. *Sov. Phys. Acoust.*, 36(3) : 238–240, 1990.

A. A. Doinikov and S. T. Zavtrak. On the mutual interaction of two gas bubbles in a sound field. *Phys. Fluids*, 7(8) :1923–1930, 1995.

D. A. Drew. Mathematical modeling of two-phase flow. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 15 :261–291, 1983.

A. Eller and H. G. Flynn. Rectified diffusion during nonlinear pulsations of cavitation bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 37 :493–503, 1965.

A. I. Eller. Damping constants of pulsating bubbles. *J. Acoust. Soc. Am. - Letters to the Editor*, 47(5) :1469–1470, 1970.

A. I. Eller. Bubble growth by rectified diffusion in an 11-khz sound field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 52 :1447–1449, 1972.

A. I. Eller and L. A. Crum. Instability of the motion of a pulsating bubble in a sound field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 47(3) :762–767, 1970.

H. G. Flynn. Cavitation dynamics. i. a mathematical formulation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 57(6) :1379–1396, 1975a.

H. G. Flynn. Cavitation dynamics. ii. free pulsations and models for cavitation bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 58(6) :1160–1170, 1975b.

L. L. Foldy. The multiple scattering of waves. *Phys. Rev.*, 67(3-4) :107–119, 1944.

M. M. Fyrillas and A. J. Szeri. Dissolution or growth of soluble spherical oscillating bubbles. *J. Fluid Mech.*, 277 :381–407, 1994.

M. M. Fyrillas and A. J. Szeri. Dissolution or growth of soluble spherical oscillating bubbles : the effect of surfactants. *J. Fluid Mech.*, 289 :295–314, 1995.

D. F. Gaitan, L. A. Crum, C. C. Church, and R. A. Roy. Sonoluminescence and bubble dynamics for a single, stable, cavitation bubble. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(6) :3166–3183, 1992.

C. W. Gear. *Numerical initial value problems in ordinary differential equations.* Prentice-Hall, 1971.

D. E. Goldman and G. R. Ringo. Determination of pressure nodes in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 21 :270, 1949.

E. Gonze, Y. Gonthier, P. Boldo, and A. Bernis. Standing waves in a high frequency sonoreactor : visualisation and effects. *Chem. Eng. Sci.*, 53(3) : 523–532, 1998.

D. Gottlieb and S. A. Orszag. *Numerical analysis of spectral methods : theory and applications.* S.I.A.M., Philadelphia, 1977.

R. K. Gould. Rectified diffusion in the presence of, and absence of, acoustic streaming. *J. Acoust. Soc. Am.*, 56 :1740–1746, 1974.

P. Hall and G. Seminara. Nonlinear oscillations of non-spherical cavitation bubbles in acoustic fields. *J. Fluid Mech.*, 101(2) :423–444, 1980.

C. Hayashi. *Nonlinear oscillations in physical systems.* McGraw-Hill, 1964.

E. J. Hinch. An averaged-equation approach to particle interactions in a fluid suspension. *J. Fluid Mech.*, 83 :695–720, 1977.

D. Y. Hsieh and M. S. Plesset. Theory of rectified diffusion of mass into gas bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 33 :206–215, 1961.

D.Y. Hsieh. Some analytical aspects of bubble dynamics. *J. Basic Engineering*, 87D :991–1005, 1965.

S. Iordansky. On the equations of motion for liquids containing gas bubbles. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 3 :102–110, 1960.

V. Kamath and A. Prosperetti. Numerical integration methods in gas-bubble dynamics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(4) :1538–1548, 1989.

M. Kameda and Y. Matsumoto. Structure of shock waves in a liquid containing gas bubbles. In S. Morioka & L. van Wijngaarden, editor, *IUTAM Symposium on waves in liquid/gas and liquid/vapour two-phase systems.* Kluwer Academic Publishers, 1995.

V. K. Kedrinskii. The iordansky-kogarko-van wijngaarden model : Shock and rarefaction wave interactions in bubbly media. *Appl. Sci. Res.*, 58 : 115–130, 1998.

J. B. Keller and I. I. Kolodner. Damping of underwater explosion bubble oscillations. *J. Appl. Phys.*, 27 :1152–1161, 1956.

Y. A. Kobelev. Nonlinear dipole oscillations of a spherical particle in a sound field. *Sov. Phys. Acoust.*, 29(6) :464–467, 1983.

Yu. A. Kobelev and L. A. Ostrovskii. Collective self-effect of sound in a liquid with gas bubbles. *JETP Lett.*, 37(1) :4–7, 1983.

Yu. A. Kobelev and L. A. Ostrovskii. Nonlinear acoustic phenomena due to bubble drift in a gas-liquid mixture. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(2) :621–629, 1989.

Yu. A. Kobelev, L. A. Ostrovskii, and A. M. Sutin. Self-illumination effect for acoustic waves in a liquid with gas bubbles. *JETP Lett.*, 30(7) :395–398, 1979.

V. V. Kuznetsov, V. E. Nakoriakov, B. G. Pokusaev, and I. R. Schreiber. Liquid with gas bubbles as an example of a Korteweg-de Vries-Burgers medium. *JETP Lett.*, 23 :172–176, 1976.

V. V. Kuznetsov, V. E. Nakoriakov, B. G. Pokusaev, and I. R. Schreiber. Propagation of perturbations in a gas-liquid mixture. *J. Fluid Mech.*, 85 : 85–96, 1978.

S. Labouret. *Détermination du taux de vide d'un champ de bulles de cavitation ultrasonore par une méthode hyperfréquence. Corrélation du taux de vide et de la puissance du bruit de cavitation.* Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 1998.

L. Landau and E. Lifschitz. *Mecanique des fluides.* Librairies du globe, 1971.

W. Lauterborn. Numerical investigation of nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 59(2) :283–296, 1976.

W. Lauterborn and E. Cramer. On the dynamics of acoustic cavitation noise spectra. *Acustica*, 49 :280–287, 1981a.

W. Lauterborn and E. Cramer. Subharmonic route to chaos observed in acoustics. *Phys. Rev. Lett.*, 47(20) :1445–1448, 1981b.

W. Lauterborn and U. Parlitz. Methods of chaos physics and their application to acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84(6) :1975–1993, 1988.

W. Lauterborn and E. Suchla. Bifurcation superstructure in a model of acoustic turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 53(24) :2304–2307, 1984.

D. Legendre, J. Boree, and J. Magnaudet. Thermal and dynamic evolution of a spherical bubble moving steadily in a superheated or subcooled liquid. *Phys. Fluids*, 10 :1256–1272, 1998.

T. G. Leighton, A. J. Walton, and M. J. W. Pickworth. Primary bjerknes forces. *Eur. J. Phys.*, 11 :47–50, 1990.

B. V. Levich. *Physicochemical Hydrodynamics.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962.

A. Lezzi and A. Prosperetti. Bubble dynamics in a compressible liquid. part 2. second-order theory. *J. Fluid Mech.*, 185 :289–321, 1987.

J. Magnaudet. The forces acting on bubbles and rigid particles. In *ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting*, 1997.

J. Magnaudet and D. Legendre. The viscous drag force on a spherical bubble with a time-dependent radius. *Phys. Fluids*, 10 :550–554, 1998.

T. J. Mason. *Sonochemistry.* The Royal Society of Chemistry, Cambridge, 1990a.

T. J. Mason, editor. *Advances in Sonochemistry.* Jai Press Ltd, London, 1990b.

Y. Matsumoto and M. Kameda. Pressure wave phenomena in bubbly liquid. *Nuclear Engineering and Design*, 141 :123–134, 1993.

D. W. Moore. The boundary layer on a spherical gas bubble. *J. Fluid Mech.*, 16 :161–176, 1963.

P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of theoretical physics.* McGraw-Hill, 1953.

P. M. Morse and K. U. Ingard. *Theoretical acoustics.* McGraw-Hill, 1968.

B. E. Nemtsov. Effects of the radiative interaction of bubbles in a liquid. *Sov. Tech. Phys. Lett.*, 9(7) :368–369, 1983.

E. A. Neppiras. Acoustic cavitation. *Phys. Rep.*, 61 :160–251, 1980.

E. A. Neppiras and B. E. Noltingk. Cavitation produced by ultrasonics : Theoretical conditions for the onset of cavitation. *Proc. Phys. Soc*, B63 : 1032–1038, 1951.

E.A. Neppiras. Subharmonic and other low-frequency emission from bubbles in sound-irradiated liquids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 46 :587–601, 1969.

R. I. Nigmatulin. Spatial averaging in the mechanics of heterogeneous and dispersed systems. *Int. J. Multiphase Flow*, 5 :353–385, 1978.

B. E. Noltingk and E. A. Neppiras. Cavitation produced by ultrasonics. *Proc. Phys. Soc*, B63 :674–685, 1950.

L. Noordzij and L. van Wijngaarden. Relaxation effects, caused by relative motion, on shock waves in gas-bubble/liquid mixtures. *J. Fluid Mech.*, 66 (1) :115–143, 1972.

W. L. Nyborg and D. E. Hughes. Bubble annihilation in cavitation streamers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 42(4) :891–894, 1967.

U. Parlitz, V. English, C. Scheffczyk, and W. Lauterborn. Bifurcation structure of bubble oscillators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 88(2) :1061–1077, 1990.

U. Parlitz, C. Scheffczyk, I. Akhatov, and W. Lauterborn. Structure formation in cavitation bubble fields. *Chaos, solitons & fractals*, 5(10) :1881–1891, 1995.

M. S. Plesset. On the stability of fluid flows with spherical symmetry. *J. Appl. Phys.*, 25(1) :96–98, 1954.

M. S. Plesset and T. P. Mitchell. On the stability of the spherical shape of a vapor cavity in a liquid. *Q. Appl. Math.*, 13(4) :419–430, 1956.

H. Poritsky. In *First US National congress in Applied Mathematics*, page 813. ASME, 1952.

A. Prosperetti. Nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids : steady state solutions. *J. Acoust. Soc. Am.*, 56(3) :878–885, 1974.

A. Prosperetti. Nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids : transient solutions and the connection between subharmonic signal and cavitation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 57(4) :810–821, 1975.

A. Prosperetti. Viscous effects on perturbed spherical flows. *Q. Appl. Math.*, 34 :339–352, 1977a.

A. Prosperetti. Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 61(1) :17–27, 1977b.

A. Prosperetti. The thermal behaviour of oscillating gas bubbles. *J. Fluid. Mech.*, 222 :587–616, 1991.

A. Prosperetti. Linear waves in bubbly liquids. In S. Morioka and L. van Wijngaarden, editors, *IUTAM Symposium on waves in liquid/gas and liquid/vapour two-phase systems*, pages 55–65. Kluwer Academic Publishers, 1995.

A. Prosperetti. A new mechanism for sonoluminescence. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(4) :2003–2007, 1997.

A. Prosperetti and A. Lezzi. Bubble dynamics in a compressible liquid. part 1. first-order theory. *J. Fluid Mech.*, 168 :457–478, 1986.

A. Prosperetti and G. Seminara. Linear stability of a growing or collapsing bubble in a slightly viscous liquid. *Phys. Fluids*, 21(9) :1465–1470, 1978.

A. Prosperetti, L. A. Crum, and K. W. Commander. Nonlinear bubble dynamics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 83 :502–514, 1988.

A. S. Sangani. A pairwise interaction theory for determining the linear acoustic properties of dilute bubbly liquids. *J. Fluid Mech.*, 232 :221–284, 1991.

A. S. Sangani and R. Sureshkumar. Linear acoustic properties of bubbly liquids near the natural frequency of the bubbles using numerical simulations. *J. Fluid Mech.*, 252 :239–264, 1993.

E. Silberman. Sound velocity and attenuation in bubbly mixtures measured in standing wave tubes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 29(8) :925–933, 1957.

S. Sochard. *Modélisation de la cavitation acoustique et de l'activation de réactions homogènes.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1996.

A. Strasberg. Rectified diffusion : comments on a paper of hsieh and plesset. *J. Acoust.Soc.Am. - Letters to the Editor*, 33 :359, 1961.

M. Strasberg and T. B. Benjamin. Excitation of oscillations in the shape of pulsating gas bubbles. *J. Acoust. Soc. Am. (abstract)*, 30 :697, 1958.

K. S. Suslick. *Ultrasound. Its chemical, Physical and Biological effects.* VCH Publishers, New-York, 1988.

L. Trilling. The collapse and rebound of a gas bubble. *J. Appl. Phys.*, 23 : 14–17, 1952.

L. van Wijngaarden. Linear and nonlinear dispersion of pressure pulses in liquid-bubble mixtures. In *6th Symposium on Naval Hydrodynamics*, pages 115–128, Washington DC, 1966. Office of Naval Research.

L. van Wijngaarden. On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles. *J. Fluid Mech.*, 33(3) :465–474, 1968.

L. van Wijngaarden. One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 4 :369–396, 1972.

L. Van Wijngaarden. Hydrodynamic interaction between gas bubbles in liquid. *J. Fluid Mech.*, 77(1) :27–44, 1976.

A. J. Walton and G. T. Reynolds. Sonoluminescence. *Advances in Physics*, 33(6) :595–660, 1984.

M. Watanabe and A. Prosperetti. Shock waves in dilute bubbly liquids. *J. Fluid Mech.*, 274 :349–381, 1994.

G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves.* Wiley-Interscience, 1974.

K. Yosioka and Y. Kawasima. Acoustic radiation pressure on a compressible sphere. *Acustica*, 5 :167–173, 1955.

F. R. Young. *Cavitation.* McGraw-Hill, 1989.

E. A. Zabolotskaya. Interaction of gas bubbles in a sound field. *Sov. Phys. Acoust.*, 30(5) :365–368, 1984.

D. Zardi and G. Seminara. Chaotic mode competition in the shape oscillations of pulsating bubbles. *J. Fluid Mech.*, 286 :257–276, 1995.

S. T. Zavtrak. Bjerknes interaction force of two gas bubbles in a sound field. *Sov. Phys. Acoust.*, 33(2) :145–147, 1987.

D. Z. Zhang and A. Prosperetti. Averaged equations for inviscid disperse two-phase flow. *J. Fluid Mech.*, 267 :185–219, 1993.

D. Z. Zhang and A. Prosperetti. Ensemble phase-averaged equations for bubbly flows. *Phys. Fluids*, 6(9) :2956–2970, 1994.

S. A. Zwick. Behaviour of small permanent gas bubbles in a liquid. *J. Math. Phys.*, 37 :246–268, 1958.

Titre : Contribution à l'étude de la propagation des ultrasons en milieu cavitant.

Résumé :

La principale limitation des procédés ultrasonores est la méconnaissance de la répartition de l'énergie acoustique dans le volume à insonifier, la présence des bulles de cavitation mettant les hypothèses de l'acoustique linéaire en défaut.

Le caractère non-linéaire des oscillations radiales de ces bulles constitue la première difficulté dans la modélisation de la propagation des ultrasons de puissance. A partir d'un modèle de liquide à bulles, la non-linéarité de l'onde acoustique est tout d'abord examinée numériquement dans une géométrie monodimensionnelle, à l'aide d'un code de calcul par éléments finis développé à cet effet. La population de bulles est supposée uniforme dans l'espace et monodisperse, et le code est utilisé pour différents rapports de la fréquence acoustique à la fréquence propre des bulles. Les résultats obtenus montrent divers couplages entre le contenu harmonique des différentes grandeurs et la longueur du domaine, mais surtout que l'amortissement spatial de l'onde augmente notablement avec l'amplitude de la source.

La population de bulles n'est cependant pas une donnée du problème, et l'hypothèse de monodispersité et d'homogénéité spatiale est relaxée, en sacrifiant les aspects non-linéaires. Les phénomènes de croissance, de migration, de fragmentation et de coalescence des bulles sont quantifiés, et réunis dans une équation de bilan de population, qui décrit l'auto-organisation de la population de bulles sous l'influence de l'onde acoustique. Le système est fermé par une équation de propagation en liquide à bulles linéarisée.

Le système d'équations obtenu présente une forme complexe, mais sa résolution pourrait être envisageable dans un régime permanent. A défaut d'une telle résolution, une confrontation qualitative du modèle obtenu à l'interprétation de l'effet d'écran est proposée, et montre la nécessité d'ajouter au modèle une équation de transport de gaz dissous, et de reconsidérer la quantification des divers phénomènes dans un cadre non-linéaire.

Title : A contribution to the study of propagation of ultrasounds in cavitating media.

Abstract :

The main limitation of ultrasonic processes is the lack of knowledge spatial distribution of the acoustic energy in the insonified volume, because the presence of cavitation bubbles puts the problem out of the validity range of linear acoustics.

The nonlinear behaviour of bubbles radial oscillations is the first difficulty in modelling the propagation of power ultrasounds. First, by using a bubbly liquid model, the nonlinearity of the acoustic wave is studied numerically in a monodimensional geometry, with a finite-elements code developed for this purpose. The bubble population is assumed to be monodisperse and spatially uniform, and the code if used for different ratios between the acoustic frequency and the resonance frequency of the bubbles. The results show different couplings between the harmonic content of the various quantities and the length of the cavity, but most of all, that the spatial damping of the wave increases appreciably with the magnitude of the acoustic source.

However, the bubble population is an unknown of the problem, and the assumption of monodispersity and spatial uniformity is relaxed, setting aside in other respects the nonlinear aspects. The growth, migration, fragmentation and coalescence phenomena are quantified and combined in a conservation equation of the bubble size distribution function, which describes the self-organisation of the bubble population under the influence of the acoustic wave. The system is closed by the linearised propagation equation in a bubbly liquid.

The set of equations obtained constitutes a difficult problem, but its resolution may be conceivable for a steady state. For lack of a solution, a qualitative comparison of the model with the screen effect is proposed, and shows that a dissolved gas transport equation should be added to the model, and that the quantification of the various phenomena should be reconsidered within a nonlinear framework.

Discipline : Génie des procédés

Mots clés : ultrasons, cavitation, bulles, dispersion, nonlinéaire, acoustique, onde stationnaire, distribution de taille, taux de gaz, diffusion rectifiée, forces de Bjerknes, coalescence, fragmentation, effet d'écran

Laboratoire d'accueil : École des Mines d'Albi-Carmaux
Campus Jarlard – Route de Teillet
81013 Albi CT Cédex 09