

Couplage conducto-convecto-radiatif par échantillonnage de chemins : un parallèle avec les chemins de multi-diffusions en transfert radiatif

Loris Ibarrart, Stephane Blanco, C. Caliot, Mouna El-Hafi, Fournier Richard,
Léa Penazzi

► **To cite this version:**

Loris Ibarrart, Stephane Blanco, C. Caliot, Mouna El-Hafi, Fournier Richard, et al.. Couplage conducto-convecto-radiatif par échantillonnage de chemins : un parallèle avec les chemins de multi-diffusions en transfert radiatif. SFT 2019 - 27ème Congrès Français de Thermique, Jun 2019, Nantes, France. p. 239-246. hal-02441250

HAL Id: hal-02441250

<https://hal-mines-albi.archives-ouvertes.fr/hal-02441250>

Submitted on 5 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Couplage conducto-convecto-radiatif par échantillonnage de chemins : un parallèle avec les chemins de multi-diffusions en transfert radiatif

Loris IBARRART^{1,2,*}, Stéphane BLANCO², Cyril CALIOT³, Mouna EL HAFT¹, Richard FOURNIER², Léa PENAZZI^{1,3}

¹RAPSODEE, UMR CNRS 5302, Mines Albi, Albi, France

²LAPLACE - UMR CNRS 5213, Toulouse, France

³PROMES - CNRS, UPR 8521, Odeillo, France

*(loris.ibarrart@mines-albi.fr)

Résumé - La méthode de Monte Carlo est largement utilisée pour la simulation du transfert radiatif. De récents travaux proposent d'utiliser des algorithmes similaires pour la résolution des transferts thermiques conducto-convecto-radiatif couplés. Ces approches statistiques ont pour principal avantage d'être résilients à la complexité géométrique, y compris en présence de grands rapports d'échelle en temps et en espace, grâce aux outils de la synthèse d'image. Cependant, certaines difficultés sont apparues à certaines limites paramétriques au niveau des temps de calcul. Cette étude s'efforce de faire un parallèle entre ces difficultés et celles rencontrées pour les fortes épaisseurs optiques dans la résolution du transfert radiatif par Monte Carlo.

Nomenclature

T	Température, K	<i>Symboles grecs</i>	
\mathbf{v}	Vecteur vitesse, $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	Ω	Domaine / Milieu,
Pe	Péclet local ($\delta_F \mathbf{v} / \alpha$)	δ	Longueur du pas de la marche statistique, m
\mathbf{n}	Normale sortante	α	Diffusivité thermique, $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
\mathcal{I}	Luminance, $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}$	λ_S	Conductivité thermique dans le solide, $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
h_R	Coefficient d'échange radiatif linéarisé ($4\epsilon\sigma T_{ref}^3$), $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$	ϕ	Porosité
L	Largeur d'une section de canal, m	μ	Viscosité dynamique, Pa.s
l	Longueur des canaux, m	<i>Indices et exposants</i>	
p	Pression, Pa	p	Paroi
r	Nombre aléatoire uniforme dans $[0, 1]$	S	Solide
		F	Fluide
		R	Radiatif

1. Introduction

La résolution d'équations différentielles par des méthodes statistiques, notamment pour le transfert de chaleur, n'est pas une idée nouvelle. En effet, dès le début du 20ème siècle, Courant, Friedrichs, et Lewy [1] font le lien entre les marches aléatoires et les problèmes aux limites pour les équations différentielles elliptiques. Par la suite, les travaux de Feynmann et Kac [2] ouvrent la porte à la résolution de nombreux problèmes linéaires par le balayage d'un espace de chemins stochastiques. Assez rapidement, Haji-Sheikh et Sparrow [3] introduisent les marcheurs aléatoires dans le cadre de la résolution de la conduction thermique [4] dans des géométries libres sans maillage.

Parallèlement à cela, la vision probabiliste pour les échanges thermiques par rayonnement

est d'usage depuis de nombreuses années. Est en cause l'équation de Boltzmann, dont la lecture statistique est directe et exacte. La méthode de Monte Carlo est ainsi devenue la méthode de référence pour le transfert radiatif. Plus récemment, l'industrie de la synthèse d'image s'est appropriée cette vision statistique ainsi que les algorithmes Monte Carlo qui vont de pair afin de passer outre certaines limitations liées à la rasterisation [5]. Les outils nés de cet investissement profitent aujourd'hui à la communauté scientifique utilisant les méthodes statistiques, et permettent notamment de gérer la complexité géométrique. De plus, comme le nombre de pas moyen pour chaque chemin statistique est fonction de l'épaisseur optique du système, il est possible de faire une prédiction théorique des temps de calcul à partir de raisonnements sur des configurations simplifiées équivalentes.

Une nouvelle gamme de méthodes propose aujourd'hui une lecture statistique du couplage entre différents phénomènes physiques [6] [7]. Dans ces algorithmes, les marcheurs statistiques qui balaient l'espace de chemin se déplacent dans le temps et l'espace, mais sautent également d'un phénomène à un autre. On se propose ici d'observer le comportement d'un algorithme couplé pour identifier les paramètres qui pilotent le nombre moyen de pas dans une configuration simple. La première partie décrit le modèle utilisé et la démarche pour construire la formulation intégrale. Ensuite, les algorithmes correspondants sont présentés. Enfin, l'évolution du temps de calcul en fonction de paramètres géométriques, physiques, et numériques est représentée et discutée dans la dernière section.

2. Modèle Statistique

Le modèle et la méthode présentés dans [8] sont ici repris pour permettre la résolution couplée conducto-convecto-radiative au régime stationnaire. Le détail des équations résolues, des formulations intégrales, et des algorithmes obtenus est rappelé ci-dessous.

2.1. Problème conducto-convecto-radiatif

Soit un milieu solide opaque homogène et un milieu fluide homogène transparent d'écoulement connu, modélisés par les équations 1, 2, et 3. Dans l'équation 3, le transfert radiatif est linéarisé autour d'une température de référence T_{ref} , et seules sont considérées des quantités radiatives moyennes sur tout le spectre, d'où l'introduction du coefficient d'échange radiatif h_R et de la température radiative T_R définie par l'équation 4 à partir du flux radiatif incident.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta T(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_S \quad (1) \\ \nabla \cdot (-\alpha \nabla T(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) T(\mathbf{x})) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_F \quad (2) \\ \mathbf{n} \cdot \lambda_S \nabla T(\mathbf{x}_p) = -\mathbf{n} \cdot \lambda_F \nabla T(\mathbf{x}_p) + h_R (T(\mathbf{x}_p) - T_R(\mathbf{x}_p)), & \mathbf{x}_p \in \partial\Omega_S \cap \partial\Omega_F \quad (3) \end{array} \right.$$

$$\sigma T_R(\mathbf{x}_p)^4 = \int_{2\pi} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}| \mathcal{I}(\mathbf{x}_p, -\mathbf{u}) d\omega(\mathbf{u}) \quad (4)$$

2.2. Formulation intégrale

Par harmonie du laplacien, en tout point \mathbf{x} du solide, pour toute distance δ_S inférieure à la distance minimale entre \mathbf{x} et les parois du solide, la solution de l'équation 1 peut s'écrire comme l'équation 5. C'est précisément l'idée fondatrice des algorithmes de Monte Carlo de type Walk On Sphere : la température en tout point est la moyenne des températures sur une sphère englobante ; on tire aléatoirement un point sur cette sphère, et on peut recommencer en "sautant"

sur une nouvelle sphère englobante autour de ce nouveau point, définissant ainsi récursivement un chemin ; on poursuit ce chemin jusqu'à l'obtention d'une température connue (exemple : en un point suffisamment proche d'une frontière à température imposée). On comprend dès lors que c'est le nombre moyen de sauts réalisés avant obtention d'une telle température qui pilote le temps de calcul.

$$T(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} T(\mathbf{x} + \delta_S \mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_S \quad (5)$$

De la même façon, l'équation 2 peut être réécrite sous forme d'intégrale sur une sphère englobante, sous l'hypothèse que les variations du champ de vitesse en norme et en direction soient négligeables à l'intérieur de cette sphère [9]. Sous cette même hypothèse, un choix différent est ici réalisé : séparer deux comportements distincts en projetant l'équation sur \mathbf{e}_v la direction de la vitesse (équation 6) et $\perp_{\mathbf{e}_v}$ son plan orthogonal (équation 7).

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_v} \left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial x_v} + \|\mathbf{v}\| T \right) = 0, & \text{sur } \mathbf{e}_v \\ \Delta T = 0, & \text{sur } \perp_{\mathbf{e}_v} \end{cases} \quad (6)$$

$$\Delta T = 0, \quad \text{sur } \perp_{\mathbf{e}_v} \quad (7)$$

Par l'introduction d'une distance δ_F petite devant les variations du champ de vitesse, l'équation 7 est traitée de la même façon que l'équation 1, ce qui mène à une expression similaire à l'équation 5, où l'intégrale est sur 2π dans le plan $\perp_{\mathbf{e}_v}$. Pour l'équation 6, on utilise un schéma de type différence finie proposé par [10] en injectant la solution analytique 1D, qui est fonction du Péclet local $Pe = \frac{\delta_F \|\mathbf{v}\|}{\alpha}$. Cela permet d'écrire la température comme une somme pondérée des températures un peu en amont et un peu en aval dans le fluide. Au final, en combinant les équations 6 et 7, on obtient une expression de la température en tous points \mathbf{x} du fluide (équation 8).

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) = & \underbrace{\frac{Pe e^{Pe}}{Pe(e^{Pe} + 1) + 4(e^{Pe} - 1)}}_{\mathbb{P}_{amont}} T(\mathbf{x} - \delta_F \mathbf{e}_v) + \underbrace{\frac{Pe}{Pe(e^{Pe} + 1) + 4(e^{Pe} - 1)}}_{\mathbb{P}_{aval}} T(\mathbf{x} + \delta_F \mathbf{e}_v) \\ & + \underbrace{\frac{4(e^{Pe} - 1)}{Pe(e^{Pe} + 1) + 4(e^{Pe} - 1)}}_{\mathbb{P}_{diffusion}} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} T(\mathbf{x} + \delta_F \mathbf{u}_{\perp}) d\mathbf{u}_{\perp}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_F \end{aligned} \quad (8)$$

Enfin, par discrétisation des gradients dans l'équation 3, on obtient l'équation 9.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}_p) = & \underbrace{\frac{\delta_F \lambda_S}{\delta_F \lambda_S + \delta_S \lambda_F + \delta_S \delta_F h_R}}_{\mathbb{P}_S} T(\mathbf{x}_p - \delta_S \mathbf{n}) + \underbrace{\frac{\delta_S \lambda_F}{\delta_F \lambda_S + \delta_S \lambda_F + \delta_S \delta_F h_R}}_{\mathbb{P}_F} T(\mathbf{x}_p + \delta_F \mathbf{n}) \\ & + \underbrace{\frac{\delta_S \delta_F h_R}{\delta_F \lambda_S + \delta_S \lambda_F + \delta_S \delta_F h_R}}_{\mathbb{P}_R} T_R(\mathbf{x}_p), \quad \mathbf{x}_p \in \partial\Omega_S \cap \partial\Omega_F \end{aligned} \quad (9)$$

Les équations 5, 8, et 9 permettent toutes trois d'exprimer la température en un point comme la somme pondérée (discrète ou continue) d'autres températures. De la même façon que dans les algorithmes de Monte Carlo de type Walk On Sphere, ces équations sont interprétées de façon statistique pour définir des chemins statistiques, et obtenir les algorithmes de la section 3.

2.3. Diffusion gaussienne et marches aléatoires : une première prédiction des temps de calcul

En 1905, Karl Pearson [11] se questionne sur la distribution au bout de N pas constants d'une marche aléatoire. La réponse lui vient de Lord Rayleigh qui avait traité des questions similaires dans le cadre de ses travaux sur les ondes sonores [12]. A la même époque, Louis Bachelier utilise également des marches aléatoires dans le cadre de ses travaux de thèse [13] en finance, et Albert Einstein publie ses travaux sur le mouvement brownien [14], qu'il modélise par une marche aléatoire.

Ces travaux mettent en évidence un lien entre une marche mésoscopique discrète et l'émergence d'un comportement macroscopique diffusif pour un grand nombre de marcheurs aléatoires. Ces études théoriques permettent d'obtenir le nombre moyen de pas nécessaires à une marche aléatoire pour parcourir une distance donnée. Ainsi, pour une marche aléatoire 3D partant du centre d'un cube dans lequel toutes les faces sauf une sont des miroirs du point de vue de la marche, pour un pas égal à $1/60$ ème de l'arrête, le nombre moyen de pas avant sortie est d'environ 2.10^4 . Cette évaluation permet de se donner une estimation des temps de calcul attendus dans les configurations présentées en section 4. pour la marche présentée en section 2.2..

3. Algorithmes

Algorithme 1 : Echantillonnage d'une température $T_S(\mathbf{x})$ dans le solide Ω_S

Echantillonnage uniforme d'une direction \mathbf{u} sur 4π
 $\delta = \min_{\delta > 0} (\delta_S; (\mathbf{x} + \delta\mathbf{u}) \in \partial\Omega_S; (\mathbf{x} - \delta\mathbf{u}) \in \partial\Omega_S)$
 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \delta\mathbf{u}$
si $\mathbf{x}' \in \partial\Omega_S$ **alors**
 | $T_S(\mathbf{x}) = T_p(\mathbf{x}')$ (cf algorithme 4)
sinon
 | $T_S(\mathbf{x}) = T_S(\mathbf{x}')$ (récursivité)
fin

Algorithme 2 : Echantillonnage d'une température $T_F(\mathbf{x})$ dans le fluide Ω_F

Echantillonnage uniforme d'une direction \mathbf{u} sur 2π dans le plan orthogonal à \mathbf{v}
 $\delta = \min_{\delta > 0} (\delta_S; (\mathbf{x} + \delta\mathbf{u}) \in \partial\Omega_F; (\mathbf{x} - \delta\mathbf{u}) \in \partial\Omega_F; (\mathbf{x} + \delta\mathbf{e}_v) \in \partial\Omega_F; (\mathbf{x} - \delta\mathbf{e}_v) \in \partial\Omega_F)$
 Echantillonnage uniforme de r sur $[0,1]$
si $r < \mathbb{P}_{amont}$ **alors**
 | $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \delta\mathbf{e}_v$
sinon si $r < \mathbb{P}_{amont} + \mathbb{P}_{aval}$ **alors**
 | $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \delta\mathbf{e}_v$
sinon
 | $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \delta\mathbf{u}$
fin
si $\mathbf{x}' \in \partial\Omega_F$ **alors**
 | $T_F(\mathbf{x}) = T_p(\mathbf{x}_p)$ (cf algorithme 4)
sinon
 | $T_F(\mathbf{x}) = T_F(\mathbf{x}')$ (récursivité)
fin

Algorithme 3 : Echantillonnage d'une température radiative $T_R(\mathbf{x}_p)$ sur une paroi

Echantillonnage lambertien de \mathbf{u} autour de \mathbf{n}
 Calcul de \mathbf{x}'_p la première intersection sur la demi-droite $[\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_p + \mathbf{u})$
 $T_R(\mathbf{x}_p) = T_p(\mathbf{x}'_p)$ (cf algorithme 4)

Algorithme 4 : Echantillonnage d'une température $T_p(\mathbf{x})$ sur une paroi

Echantillonnage uniforme de r sur $[0,1]$
si $r < \mathbb{P}_S$ **alors**
 | $T_p(\mathbf{x}_p) = T_S(\mathbf{x}_p - \delta_S \mathbf{n})$ (cf algorithme 1)
sinon si $r < \mathbb{P}_S + \mathbb{P}_F$ **alors**
 | $T_p(\mathbf{x}_p) = T_F(\mathbf{x}_p + \delta_F \mathbf{n})$ (cf algorithme 2)
sinon
 | $T_p(\mathbf{x}_p) = T_R(\mathbf{x}_p)$ (cf algorithme 3)
fin

4. Configurations

Deux cas d'études sont considérés sur une même géométrie de récepteur volumique solaire HiTRec constitué de canaux parallèles à section carrée (figure 1). Dans la configuration *échangeur* (figure 2), un fluide incident est réchauffé dans la structure poreuse, elle-même chauffée par l'une de ses faces. Dans la configuration *solaire*, (figure 3) le fluide démarre et finit dans un collecteur, et une source radiative provient de la même face que le fluide. Dans les deux cas, les faces latérales et inférieure sont thermiquement isolées.

Dans ces deux configurations et dans toute la longueur des canaux, on considère un écoulement laminaire établi pour un fluide visqueux. Sous les mêmes hypothèses que l'écoulement de Poiseuille, dans un canal carré de section unitaire, on obtient l'expression analytique de la vitesse en tous points (équation 10).

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{\|\mathbf{grad}(p)\|}{\mu} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{16 \sin((2i-1)\pi x) \sin((2j-1)\pi y)}{((2i-1)^2 + (2j-1)^2) (2i-1) (2j-1) \pi^4} \mathbf{e}_z \quad (10)$$

5. Résultats et discussion

5.1. Paramètres géométriques

La figure 4.1 présente l'évolution de la température moyenne du fluide le long des canaux. Pour les deux configurations, la température et le nombre moyen de pas augmentent progressivement, c'est à dire qu'une proportion de plus en plus grande de chemins finissent à la condition limite chaude. Cette courbe illustre comment l'éloignement géométrique des conditions limites de la condition initiale influence en moyenne la longueur des chemins statistiques.

Dans les figures 4.2 et 4.3, les variations portent sur les nombres de canaux N_x et N_y . Pour la configuration *solaire*, ainsi que pour la configuration *échangeur* pour N_x seulement, la modification de la géométrie n'a aucune influence. Ces résultats justifient l'utilisation des outils de la synthèse d'image, et illustrent l'insensibilité à la complexité géométrique qu'ils permettent d'atteindre d'un point de vue informatique (on peut y voir au parallèle au benchmark "teapot in

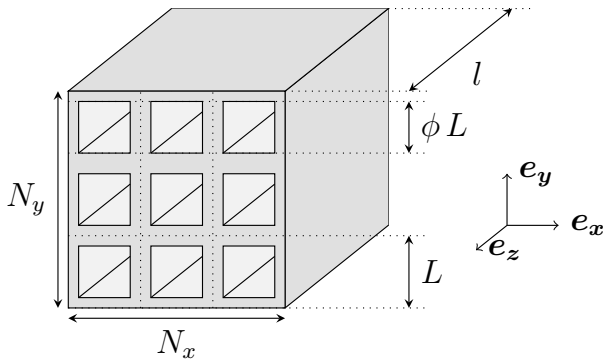


Figure 1: La structure poreuse à sections carrées.

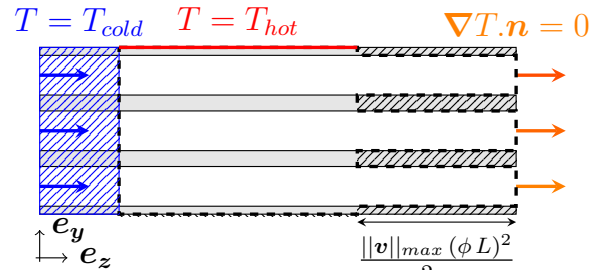


Figure 2: Configuration échangeur.

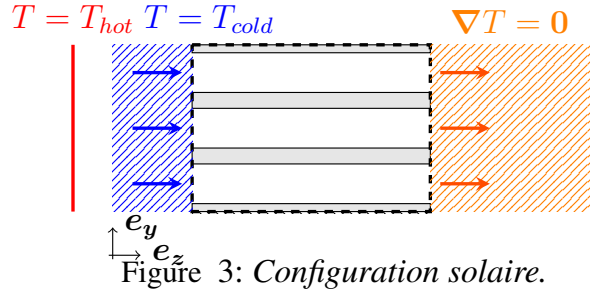


Figure 3: Configuration solaire.

the stadium”[5]). Cependant, pour la configuration *échangeur*, augmenter le nombre de canaux selon l’axe y impacte nettement la température et le temps de calcul. Cela est dû à l’éloignement de la condition limite chaude, qui implique la nécessité pour les chemins statistiques de parcourir la distance jusqu’à la condition froide. Au bout d’un certain nombre de canaux, le système peut être vu comme “opaque” (par analogie aux milieux opaques en rayonnement pur) à la condition limite chaude et les chemins statistiques ne voient que la condition limite froide, qu’ils atteignent en moyenne en $1.7 \cdot 10^5$ pas.

5.2. Paramètres physiques

Les variations des paramètres physiques dans les figures 4.4 et 4.6 mettent en évidence des limites numériques à la méthode utilisée. En effet, pour de trop faibles ratios de conductivités fluide/solide, le temps de calcul augmente très rapidement pour la configuration *solaire*. Ce comportement est expliqué par l’équation 9, dans laquelle les probabilités \mathbb{P}_F et \mathbb{P}_R deviennent négligeables devant \mathbb{P}_S : les chemins statistiques restent piégés dans le solide, sans possibilité d’atteindre une condition limite connue. Le même phénomène se produit également pour la configuration *échangeur*, mais est nettement moins remarquable pour une géométrie d’un seul canal. Dans une moindre mesure, des porosités trop petites ou grandes influencent aussi les valeurs de ces probabilités à travers δ_S et δ_F , ce qui mène à des temps de calcul plus importants.

Dans les figures 4.5 et 4.7, on peut observer deux régimes différents, séparés par une phase transitoire. Chacun de ces régimes est caractérisé par une température et un temps de calcul qui n’évoluent plus. Dans le cas de la prépondérance du terme radiatif, le comportement à la limite haute est différent selon la configuration. En effet, cette limite a pour conséquence de rendre négligeable la probabilité \mathbb{P}_S , et majoritaire la probabilité \mathbb{P}_R , ce qui entraîne un échange nul dans le cas de la configuration *échangeur*, et une température de paroi constante et égale à la condition limite de température chaude dans la configuration *solaire*.

5.3. Paramètres numériques

Enfin, les figures 4.8 et 4.9, présentent des variations des paramètres numériques de la marche : la longueur des pas dans le solide et dans le fluide. Dans la figure 4.8, la valeur de δ_S n’influence pas la température calculée, car le modèle ici choisi est stationnaire et sans termes

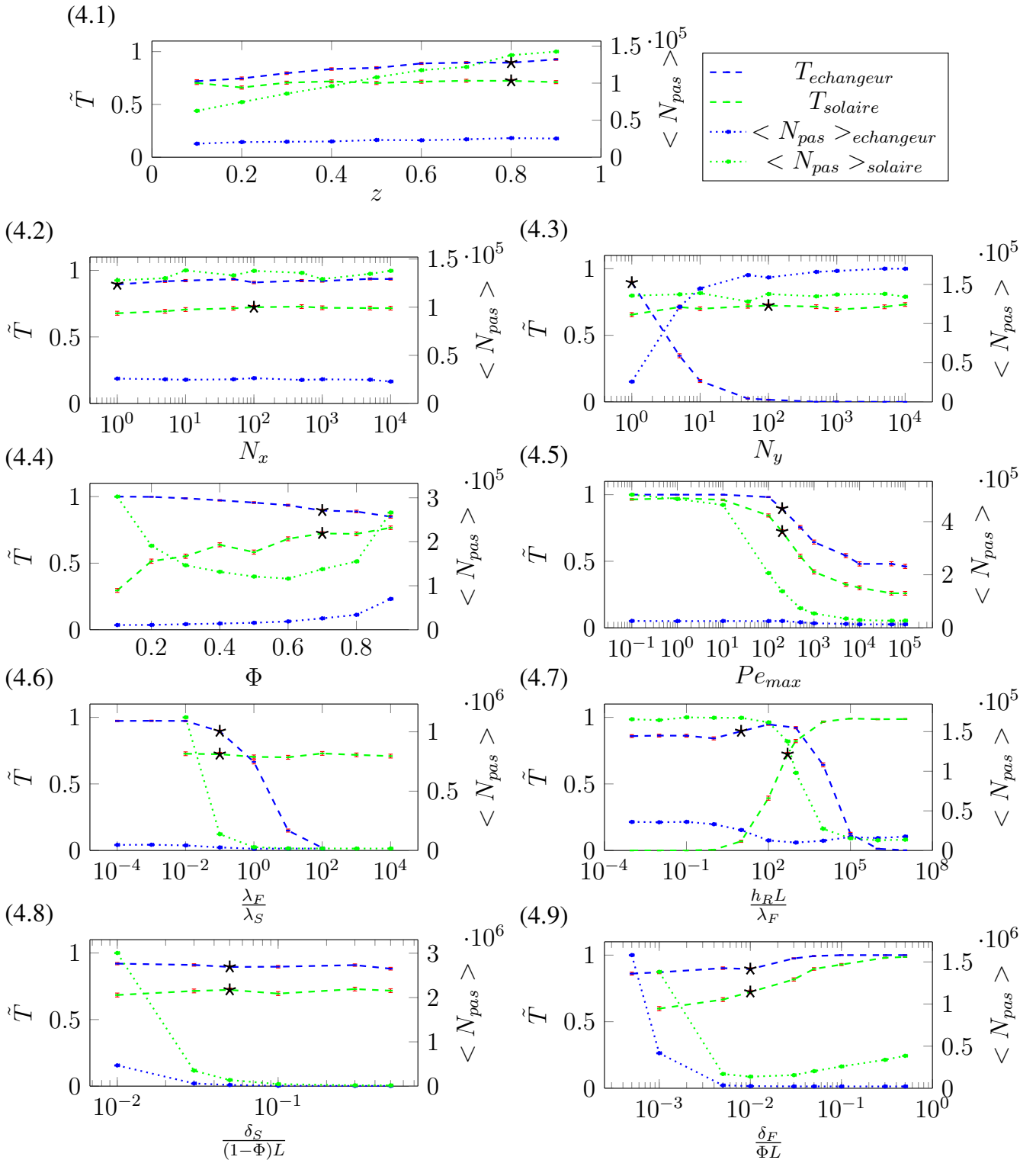


Figure 4: Evolution de la température adimensionnelle moyenne du fluide dans les configurations solaire et échangeur et du nombre moyen de pas dans chaque chemin (proportionnel au temps de calcul) pour un ratio $\frac{l}{L} = 20$, en fonction de : 1. z la position selon l'axe z dans les canaux ; 2. N_x le nombre de canaux selon l'axe e_x ; 3. N_y le nombre de canaux selon l'axe e_y ; 4. Φ la porosité du réseau ; 5. Pe_{max} le Péclet maximal dans l'écoulement ; 6. $\frac{\lambda_F}{\lambda_S}$ le rapport des conductivités fluide/solide ; 7. $\frac{h_{RL}}{\lambda_F}$ le nombre de Biot radiatif ; 8. $\frac{\delta_S}{(1-\Phi)L}$ la taille du pas de la marche dans le solide ; 9. $\frac{\delta_F}{\Phi L}$ la taille du pas de la marche dans le fluide. Les marqueurs '*' matérialisent les deux jeux de paramètres utilisés par défaut, et sont donc les mêmes points à travers toutes les courbes.

sources. Pour les pas dans le fluide (figure 4.9), on observe une convergence de la température à partir de pas de l'ordre d' $1/100^{\text{ème}}$ de la longueur caractéristique du fluide, valeur plus faible que celle que l'on se donne en général pour le solide, de l'ordre d' $1/20$. Cependant, la réduction de la taille des pas entraîne une forte augmentation du nombre moyen de pas (cf 2.3.).

6. Conclusion

En suivant une méthodologie stochastique, un algorithme de Monte Carlo a été mis en œuvre pour résoudre un problème conducto-advecto-diffusif couplé. Cet algorithme a ensuite été utilisé pour résoudre deux problèmes pour une même géométrie, avec différents paramètres géométriques, physiques, et numériques. Les résultats obtenus mettent en avant des comportements différents autant d'un point de vue thermique que numérique. L'accent a été mis sur les aspects numériques, et plus spécifiquement le temps de calcul, pour lequel on peut observer des comportements similaires aux algorithmes de Monte Carlo classiquement utilisés pour le transfert radiatif. En effet, on semble observer une corrélation entre pénétration thermique et le nombre moyen de pas dans les chemins statistiques, de la même façon que pour l'épaisseur optique en transfert radiatif. L'algorithme de Monte Carlo utilisé présente des limites à ses capacités de simulation sur certaines limites paramétriques, typiquement pour des ratios de conductivités fluide/solide trop faibles. Ces limites sont autant de pistes de recherche, pour lesquelles on peut imaginer retravailler les formulations intégrales pour définir des densités de probabilités adaptées au problème. Par ailleurs, d'autres choix de modélisation de la convection dans le fluide, par exemple le mouvement brownien avec drift, pourraient présenter des dynamiques différentes vis-à-vis du temps de calcul.

Références

- [1] Courant, R., Friedrichs, K. and Lewy, H. (1967). On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. *IBM Journal of Research and Development*, 11(2), pp.215-234.
- [2] Kac, M. (1951). On some connections between probability theory and differential and integral equations. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pp.189-215.
- [3] Haji-Sheikh, A. and Sparrow, E. (1967). The Solution of Heat Conduction Problems by Probability Methods. *Journal of Heat Transfer*, 89(2), p.121.
- [4] Ozisik, M. (2013). *Boundary Value Problems of Heat Conduction*. Dover Publications.
- [5] Pharr, M., Humphreys, G. and Jakob, W. (2017). *Physically based rendering*. Cambridge, MA : Morgan Kaufmann.
- [6] Vignoles, G. (2013). Un outil numérique basé sur des marches aléatoires hybrides pour simuler le transfert thermique couplé rayonnement/conduction dans les matériaux poreux. *21ème Congrès Français de Mécanique*.
- [7] Fournier, R., Blanco, S., Eymet, V., Hafi, M. and Spiesser, C. (2016). Radiative, conductive and convective heat-transfers in a single Monte Carlo algorithm. *Journal of Physics : Conference Series*, 676, p.012007.
- [8] L Ibarrart, C Caliot, M El-Hafi, R Fournier, S Blanco, et al. (2018). Combined conductive-convective-radiative heat transfer in complex geometry using the Monte Carlo method : application to solar receivers. *IHTC 16 - 16th International Heat Transfer Conference, Beijing*.
- [9] Sabelfeld, K. (2017). Random walk on spheres algorithm for solving transient drift-diffusion-reaction problems. *Monte Carlo Methods and Applications*, 23(3).
- [10] Patankar, S. (1980). *Numerical heat transfer and fluid flow*. [U.S.] : Hemisphere Pub.
- [11] Pearson, K. (1905). The Problem of the Random Walk. *Nature*, 72(1865), pp.294-294.
- [12] Rayleigh, L. (1880). XXXVI. Acoustical observations. III. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 9(56), pp.278-283.
- [13] Bachelier, L. (1900). *Théorie de la spéculation*. Paris : Gabay.
- [14] Einstein, A. (1905), "On the Motion of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid, as Required by the Molecular Kinetic Theory of Heat". *Ann. Phys.*, 322 : 549-560.